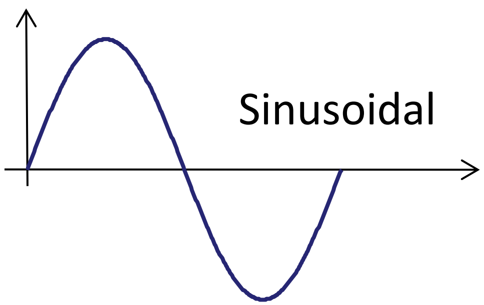
Tema 3:

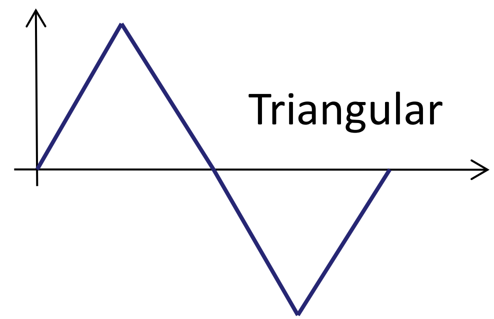
Filtros

ÍNDICE

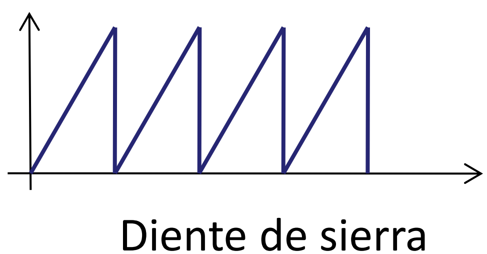
Tipos de Señales eléctricas (I)

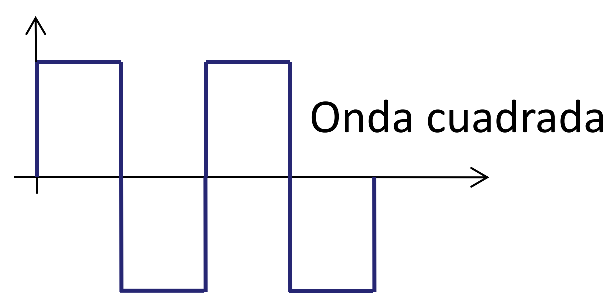
En circuitos eléctricos y electrónicos hay señales (tensiones y corrientes) con formas de onda muy diferentes. No todas ellas son continuas o sinusoidales





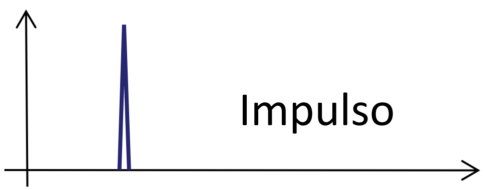
Formas de onda periódicas



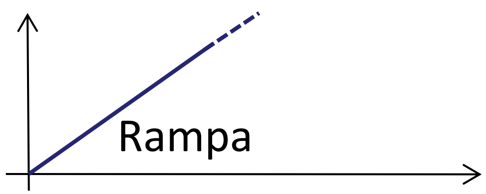


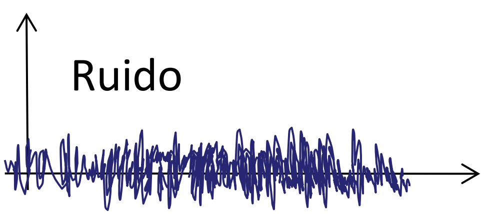
Tipos de Señales eléctricas (II)

En circuitos eléctricos y electrónicos hay señales (tensiones y corrientes) con formas de onda muy diferentes. No todas ellas son continuas o sinusoidales



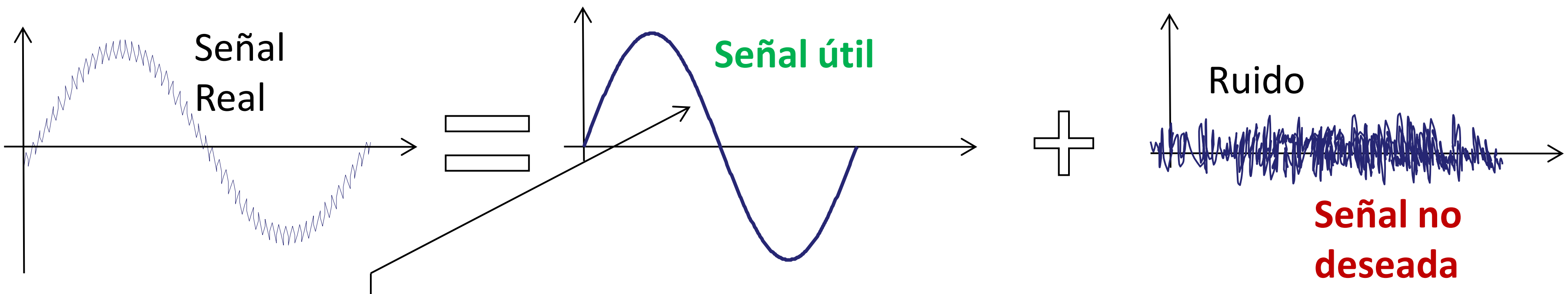
Formas de onda No periodicas





Tipos de Señales eléctricas (III)

En circuitos eléctricos y electrónicos es muy común encontrar señales que son combinación de distintas formas de onda

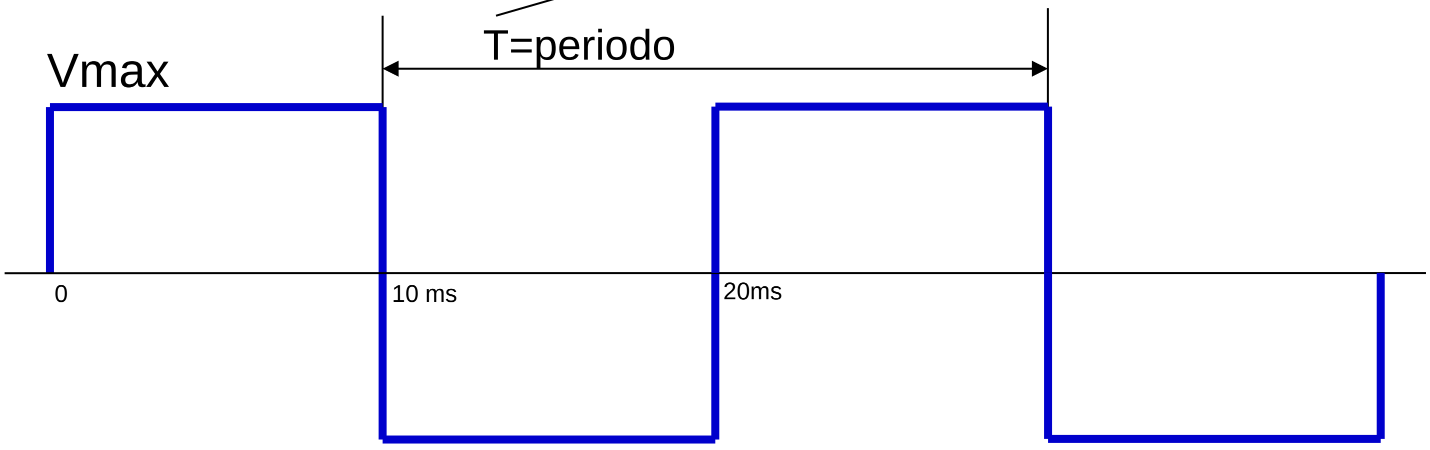


- Transferencia de energía (redes eléctricas, electrónica de potencia, etc.)
- Transferencia de información: (instrumentación, comunicaciones, etc.)

Existe alguna otra forma de representar matemáticamente una señal eléctrica que varía en el tiempo.

Veamos el caso de las funciones periódicas:

Propiedad de una onda periodica $f(t+T) = f(t)$



Representación de las señales en el dominio de la frecuencia (II)

Concepto de armónico

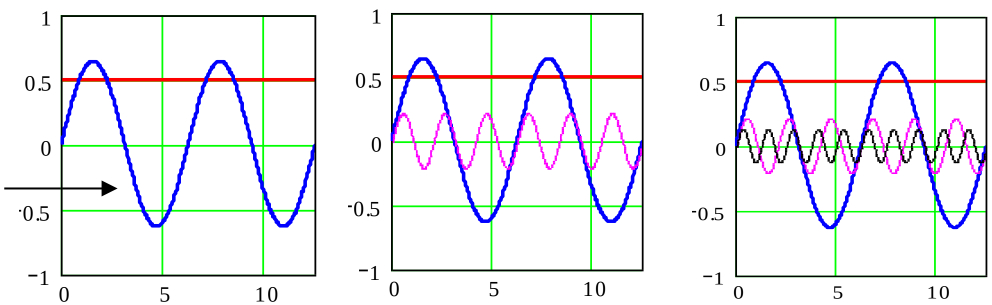
Componente continua + V_m

$+ V_m + V_1 sen(\omega t)$

$+ V_m + V_1 sen(\omega t) + V_3 sen(3\omega t)$

$+ V_m + V_1 sen(\omega t) + V_3 sen(3\omega t) + V_5 sen(5\omega t)$

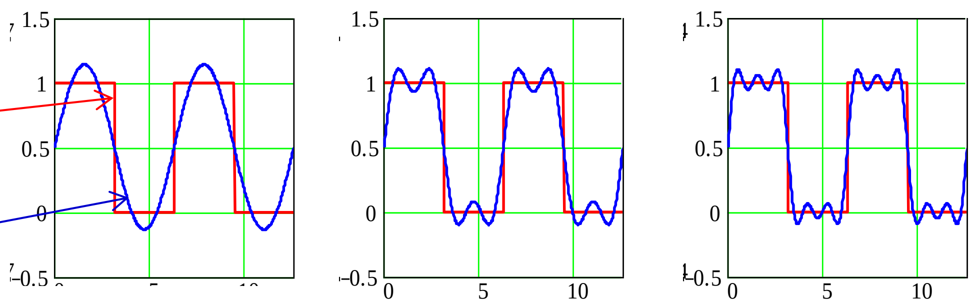
Primer armónico

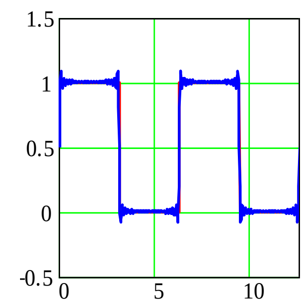


Y finalmente sumando 20 armónicos, este es el resultado:

Forma de onda objetivo

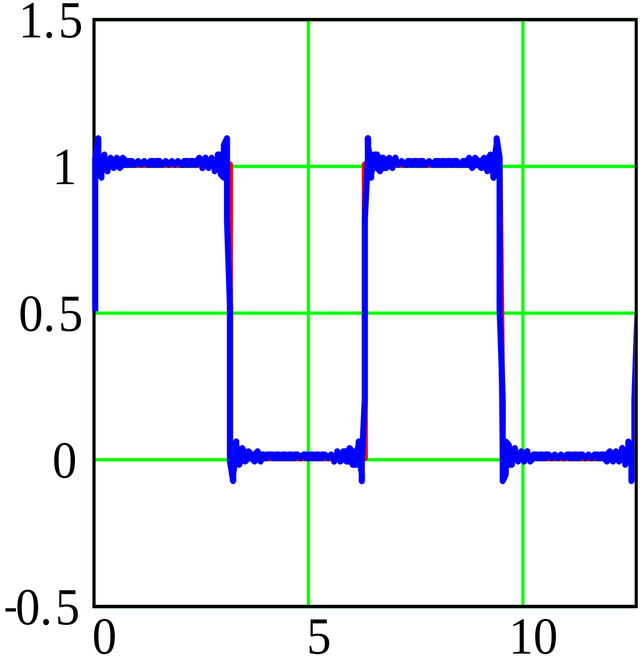
Forma de onda real





http://www.chem.uoa.gr/applets/Applet_Index2.htm

Representación de las señales en el dominio de la frecuencia (II)



Conclusiones:

- *Sumando funciones sinusoidales de distintas frecuencias, puedo reconstruir cualquier forma de onda periódica.*
- *Otra forma de expresarlo es considerar que las ondas periódicas se pueden descomponer en armónicos.*

Matemáticamente, la descomposición en armónicos de una señal periódica pasa por calcular su serie de Fourier

Representación de las señales en el dominio de la frecuencia (III)

Serie de Fourier

Número infinito de funciones sinusoidales

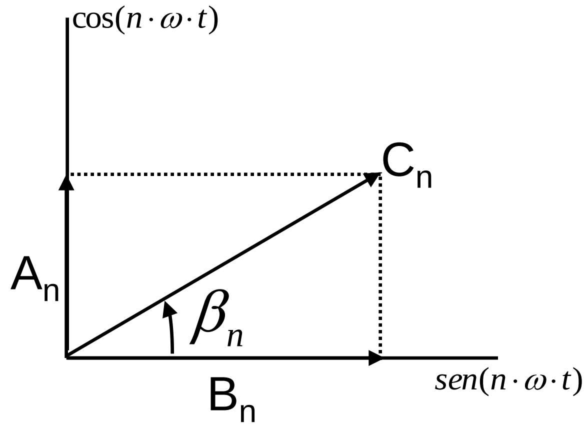
$$\boxed{f(t) \approx \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t) + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \text{sen}(n \cdot \omega \cdot t)}$$

Componente continua o valor medio

Frecuencia del primer armónico o armónico fundamental

$$A_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot \cos(n \cdot \omega \cdot t)$$

$$B_n = \frac{2}{T} \cdot \int_0^T f(t) \cdot sen(n \cdot \omega \cdot t)$$



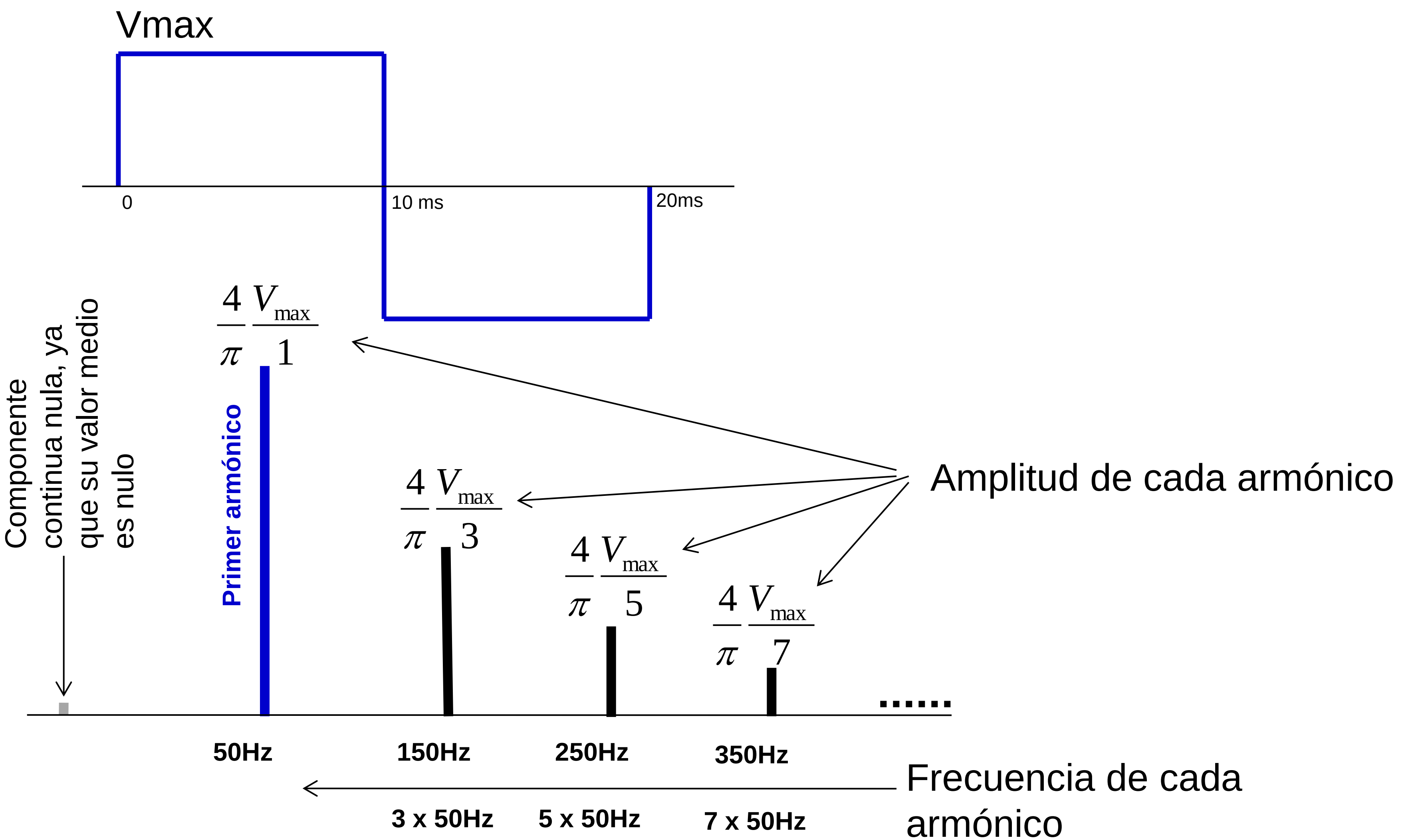
O bien:

$$\boxed{f(t) \approx \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cdot sen(n \cdot \omega \cdot t + \beta_n)}$$

$$C_n = \sqrt{A_n^2 + B_n^2}$$

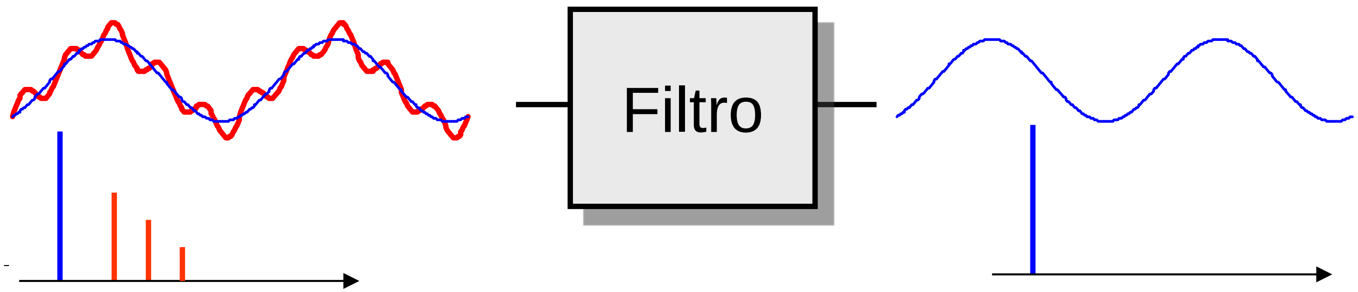
$$\beta_n = arctg\, \frac{A_n}{B_n}$$

Representación de las señales en el dominio de la frecuencia (II)

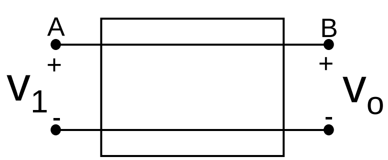


¿Qué hace un filtro?

Deja pasar ciertas frecuencias o armónicos y atenúa otras



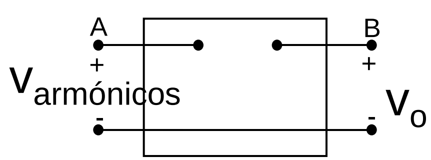
❶ Banda de paso



Rango de frecuencias que atraviesan el filtro sin atenuación. La ganancia G_F=1 idealmente

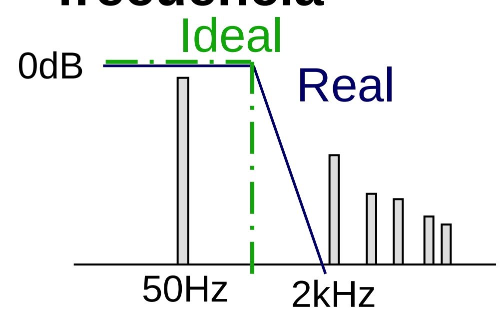
$V_o=V_1$

❷ Banda rechazada



Rango de frecuencias que son atenuadas por el filtro, idealmente rechazadas o eliminadas por completo. La ganancia G_F=0 idealmente

Respuesta en frecuencia

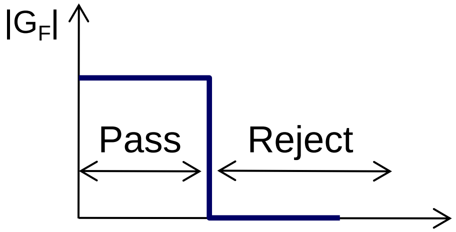


$$G_{dB} = 20\cdot\log\left|\frac{V_o}{V_f}\right| = 0dB \Rightarrow \frac{V_o}{V_f} = 1$$

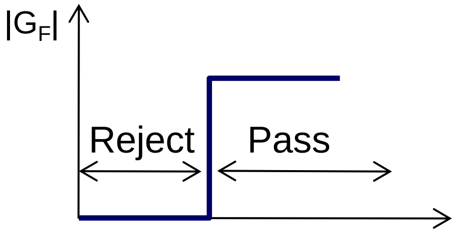
Tipos de filtros según funcionalidad

Filtros ideales

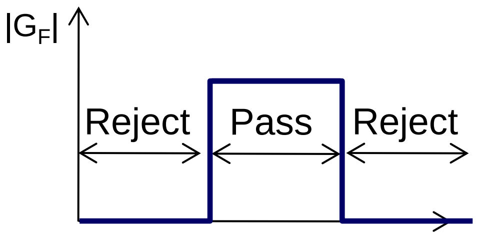
Filtro paso bajo



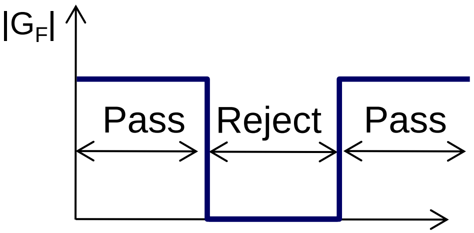
Filtro paso alto



Filtro paso banda



Filtro rechaza banda



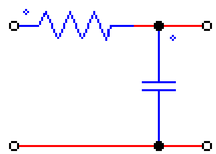
Tipos de filtros según implementación (I)

Filtros pasivos

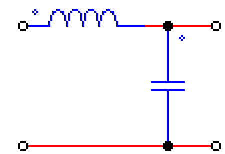
Realizados solo con resistencias, condensadores y bobinas

Ejemplos:

Filtro paso bajo primer orden



Filtro paso bajo 2º orden

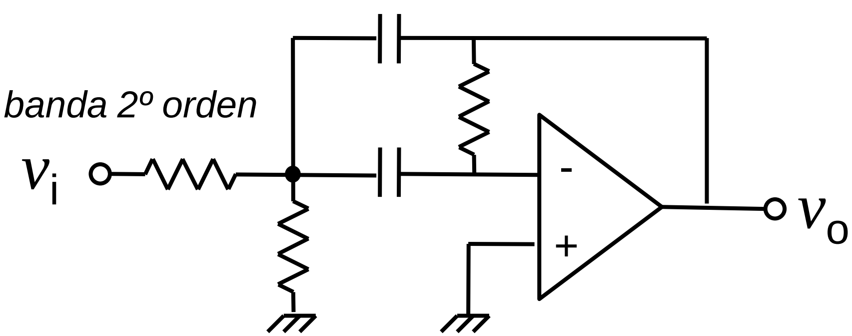


Filtros activos

Utilizan amplificadores operacionales y aprovechan sus propiedades, impedancias, realimentación negativa, etc.

Ejemplo:

Filtro paso banda 2º orden



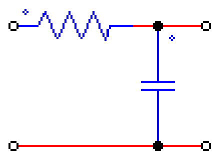
Tipos de filtros según implementación (II)

Filtros primer orden

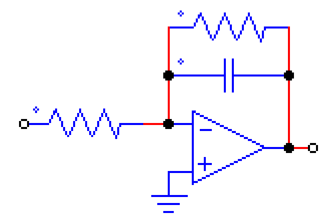
Su función de transferencia es de primer orden

Ejemplos:

Filtro pasivo paso bajo primer orden



Filtro activo paso bajo primer orden

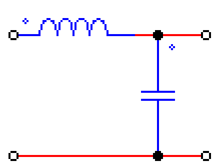


Filtros segundo orden

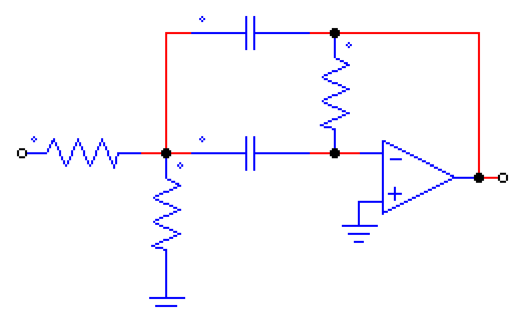
Su función de transferencia es de segundo orden

Ejemplos:

Filtro pasivo paso bajo 2º orden



Filtro paso banda 2º orden



Ejemplos de aplicaciones de los filtros

Telecomunicaciones

Filtros paso banda (0kHz a 20 kHz)

- *Modems*
- *Procesamiento de la voz*

Filtros paso banda de alta frecuencia (> 50 MHz)

- *Selección del canal en centrales de telefonía*
- *Dial de una radio*

Sistemas de instrumentación

Filtros paso bajo

- *Para eliminar ruido en el acondicionamiento de señal de sensores de temperatura, presión, vibraciones, etc.*

Filtros paso alto

- *Para eliminar componentes de offset en Sensores de temperatura, presión, vibraciones, etc.*

Sistemas de adquisición de datos

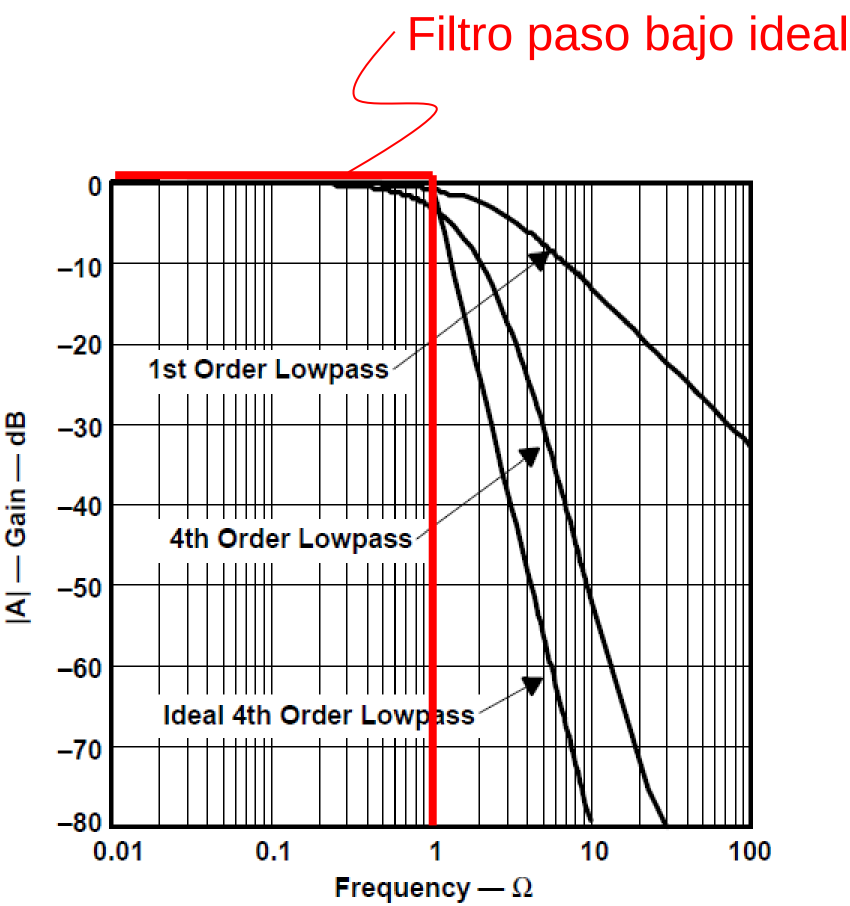
Filtros paso bajo

- *Filtros anti-aliasing*

Sistemas electrónicos de potencia

Filtros paso bajo

- *Filtros para eliminar rizado de la tensión de salida de una fuente de alimentación*
- *Filtros EMI para reducir las perturbaciones electromagnéticas conducidas*



El filtro es tanto más selectivo (mayor pendiente de la caída de la ganancia) conforme aumenta el orden del filtro.

Otros aspectos a tener en cuenta en la implementación real:

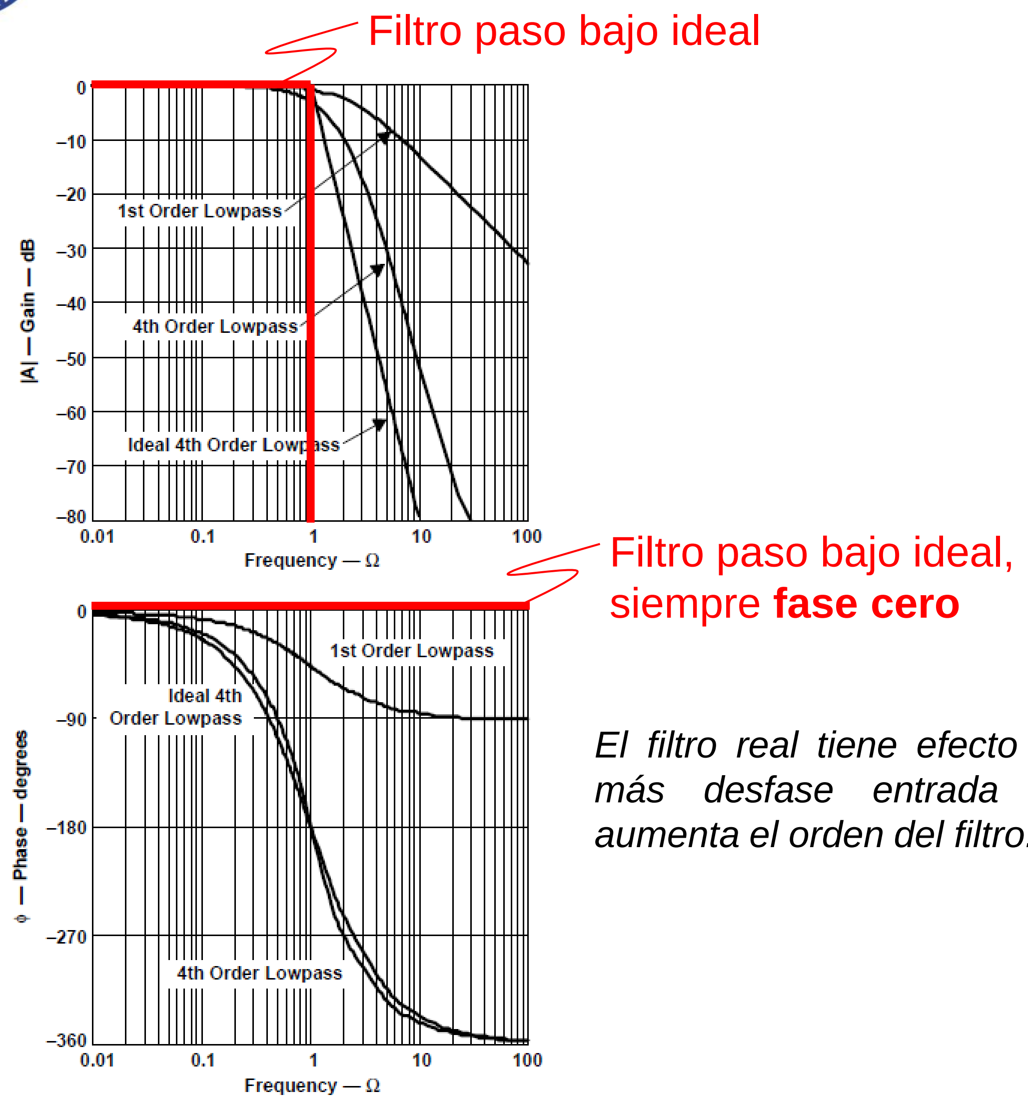
Pasivos

- *Coste y tamaño de los componentes (L y C)*
- *Efectos de carga*

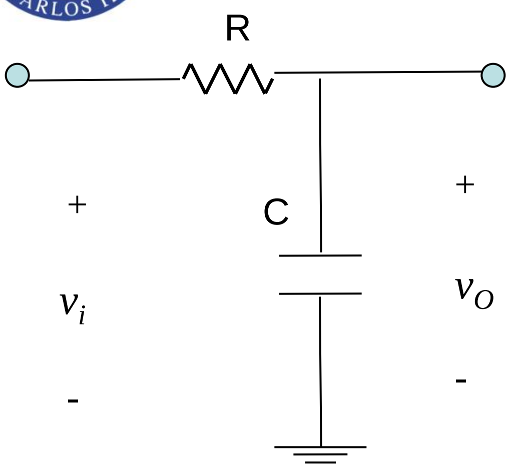
Activos

- *Ancho de banda limitado*
- *"Slew-rate limitado"*

Filtro real: modificación de la fase



El filtro real tiene efecto sobre la fase. Tanto más desfase entrada – salida conforme aumenta el orden del filtro.



Función de transferencia

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{\frac{1}{C \cdot S}}{1 + \frac{1}{C \cdot S}} = \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot S}$$

Respuesta en frecuencia

$$\frac{v_o}{v_i}(jw) = \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot jw} = \frac{1}{1 + R \cdot C \cdot j \cdot 2\pi f} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_p}}$$

$$\Rightarrow R \cdot C \cdot 2\pi = \frac{1}{f_p} \Rightarrow f_p = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C}$$

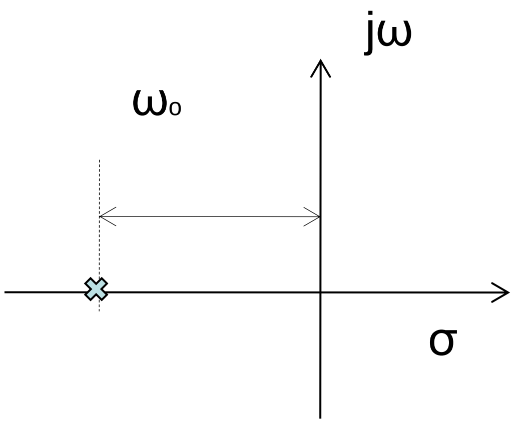
Otra expresión habitual:

$$\frac{v_o}{v_i}(s) = \frac{\omega_o}{s + \omega_o} = \frac{1}{1 + \tau \cdot s} = \frac{1}{1 + j \cdot R \cdot C \cdot \omega} = \frac{1}{1 + j\frac{f}{f_p}}$$

1 2 3 4

Filtro paso bajo de primer orden pasivo (II)

Representación de los polos en el plano de LAPLACE:



S → tiene unidades de ω

1 → polo en -ωo

1 = 2

$$\frac{\omega_o}{s + \omega_o} = \frac{1}{1 + \frac{1}{\omega_o} \cdot s} \Rightarrow \tau = \frac{1}{\omega_o}$$

3 = 4

$$\frac{1}{1 + j\frac{1}{\omega_o}\ \omega} = \frac{1}{1 + j\ \frac{2 \cdot \pi \cdot f}{\omega_o}} = \frac{1}{1 + j\ 2 \cdot \pi \cdot f \cdot R \cdot C} =$$

$$= \frac{1}{1 + j\ \frac{f}{f_p}}; \qquad f_p = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot R \cdot C}$$

Filtro paso bajo de primer orden pasivo (III)

Repaso diagrama de Bode

$$Módulo = \frac{1}{\sqrt{1 + j\dfrac{f}{f_p}}}$$

¿Cuánto vale el módulo de la ganancia para $f=f_p$?

$$\left|\frac{v_o}{v_i}\right|(f = f_p) = \frac{1}{\sqrt{1 + j \cdot 1}} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0{,}7071$$

En dB:

$$20 \cdot log\frac{1}{\sqrt{2}} = -3\ dB$$

Filtro paso bajo de primer orden pasivo (IV)

Repaso diagrama de Bode

¿Por qué cae 20 dB por década?

$$20 \cdot log \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{f}{f_p}\right)^2}} \cong 20 \cdot log \frac{1}{f/f_p} = 20 \cdot log \, {}^{f_p}/_{f}$$

Para $f/f_p > 10 \cdot 1$

$$f = 10\, f_p \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{v_o}{v_i}\right|_{dB} = 20 \log 0{,}1 = -20$$

$$f = 100\, f_p \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{v_o}{v_i}\right|_{dB} = 20 \log 0{,}01 = -40$$

Filtro paso bajo de primer orden pasivo (V)

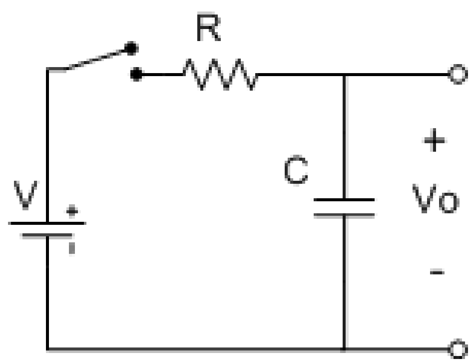
Respuesta transitoria ante entrada en escalón

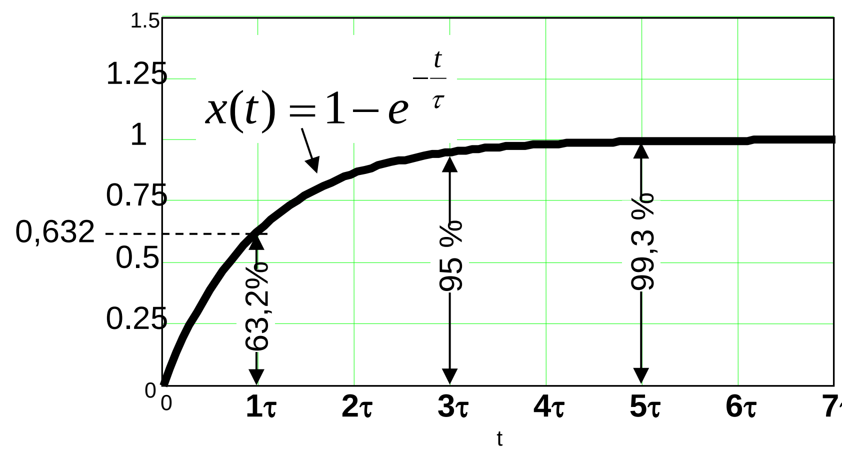
$$v_0(t) = \left[1 - e^{-t/\tau}\right] \longrightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow v_0(t) = 0 \\ t = \infty \Rightarrow v_0(t) = 1 \end{cases}$$

$$x(t) = x_\infty(t) + [x(0) - x_\infty(0)] \cdot e^{-t/\tau}$$

$$v_o = v + [0 - v]e^{-t/\tau}$$

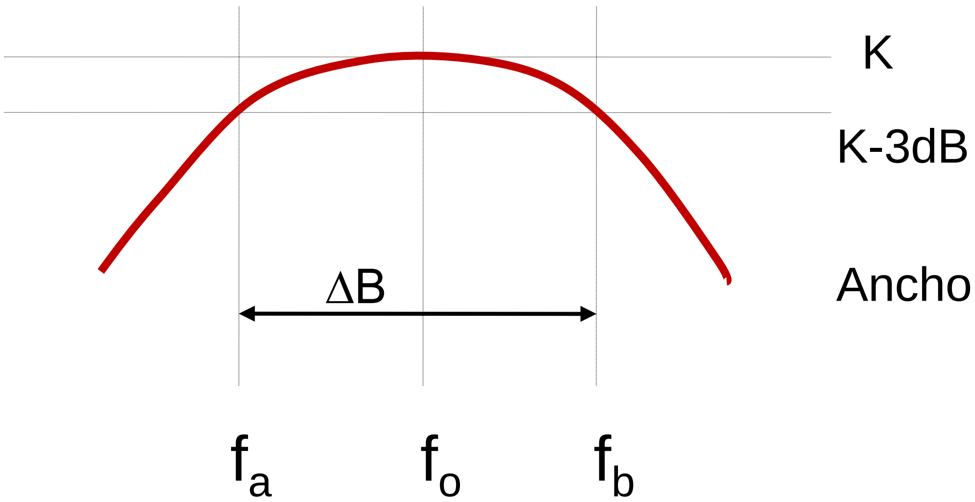
$$\begin{cases} x_\infty(t) = v \\ x(0) = 0 \\ x_\infty(0) = v \end{cases}$$





Filtro de primer orden paso banda pasivo (I)

Concepto de **selectividad** del filtro



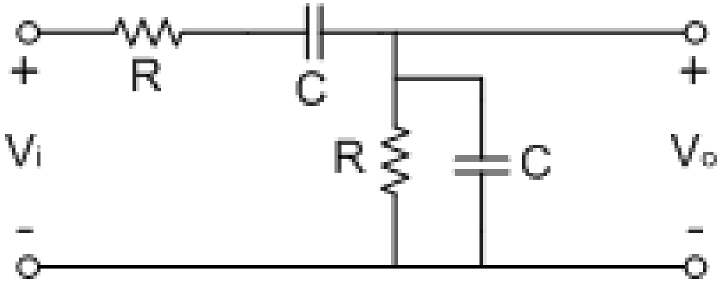
Ancho de banda: $\Delta B = f_b - f_a$

Factor de calidad del filtro: $Q = f_o / \Delta B$

Filtro **muy selectivo**: Q↑. (En filtros paso banda se necesita Q↑)

Filtro **poco selectivo**: Q↓

Filtro de primer orden paso banda pasivo (II)



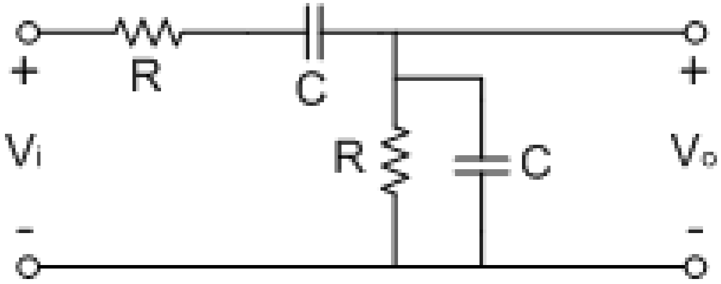
Función de transferencia

$$\frac{v_o}{v_i}(s) = \frac{\frac{R}{1+RCS}}{\frac{R}{1+RCS} + R + \frac{1}{CS}} = \frac{\frac{RCS}{1+RCS}}{\frac{RCS}{1+RCS} + RCS + 1} =$$

$$= \frac{RCS}{RCS + RCS(1+RCS) + (RCS+1)} =$$

$$= \frac{RCS}{RCS\left[3 + RCS + \frac{1}{RCS}\right]} = \frac{RCS}{R^2C^2S^2 + 3RCS + 1} = \frac{S}{S^2 + \frac{3S}{RC} + \frac{1}{R^2C^2}}$$

Filtro de primer orden paso banda pasivo (III)



¿Cuál es el máximo factor de calidad que se puede obtener con un filtro pasivo compuesto por dos etapas R-C?

Ecuación bi-cuadrática paso banda

$$\frac{v_o}{v_i}(s) = \frac{K \cdot s}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q} \cdot s + \omega_o^2}$$

Formato normalizado para funciones de transferencia paso banda de segundo orden

Identificando términos,

$$\frac{v_o}{v_i}(s) = \frac{s}{s^2 + \frac{3}{RC} \cdot s + \frac{1}{R^2C^2}} = \frac{K \cdot s}{s^2 + \frac{\omega_o}{Q} \cdot s + \omega_o^2}$$

Filtro de primer orden paso banda pasivo (IV)

Identificando términos,

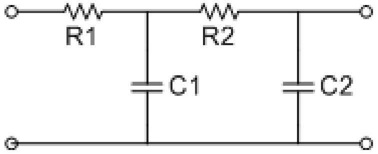
$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{3}{RC}$$

$$\omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$\omega_0 = 3 \cdot \omega_0 \cdot Q \Rightarrow Q = {}^{1}\!/_{3} < 0.5$$

*El **máximo factor de calidad** que se puede obtener con un **filtro pasivo** compuesto por dos etapas R-C es **0,5***

Ejercicio propuesto: Calcular el Q_{max} para el filtro paso bajo:

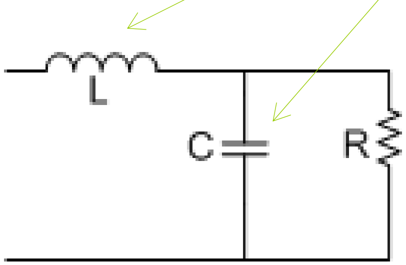


Nota: Ecuación bi-cuadrática paso bajo

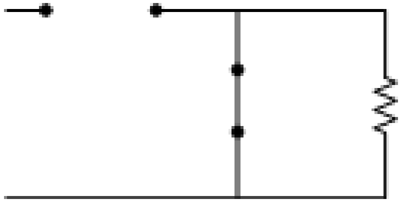
$$\frac{v_o}{v_i}(s) = \frac{K \cdot \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

Filtro de segundo orden paso bajo pasivo (I)

Dos elementos que almacenan energía



En alta frecuencia aparece un doble efecto para atenuar



Función de transferencia

$$\frac{v_o}{v_i}(s) = \frac{1}{S^2 LC + \frac{L}{R}S + 1} = \frac{\omega_0^2}{S^2 + 2\xi\omega_0 S + \omega_0^2} =$$

$$= \frac{1}{S^2 \frac{1}{\omega_0^2} + 2\xi \frac{1}{\omega_0} S + 1} = \frac{\omega_0^2}{S^2 + \frac{\omega_0}{Q} S + \omega_0^2}$$

Identificando términos,

$$\omega_0^2 = \frac{1}{\sqrt{L \cdot C}} \qquad \frac{L}{R} = 2\xi \frac{1}{\omega_0} \;\; ; \;\; \xi = \frac{L}{R}\omega_0 \frac{1}{2} \qquad \xi = \frac{\sqrt{L}\cdot\sqrt{L}}{R} \cdot \frac{1}{\sqrt{L}\sqrt{C}} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{L/C}}{2 \cdot R}$$

Filtro de segundo orden paso bajo pasivo (II)

Coeficiente de amortiguamiento del filtro

$$\xi = \frac{Z_0}{2 \cdot R}$$

Significado físico en los paso bajo y alto.

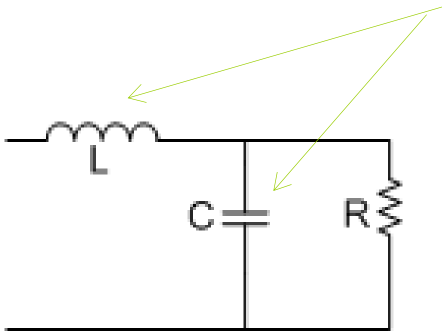
$$donde \quad 2 \cdot \xi \cdot \omega_0 = \frac{\omega_0}{Q} \quad \Rightarrow$$

Factor de calidad del filtro

$$Q = \frac{1}{2 \cdot \xi}$$

Significado físico en los paso banda.

Filtro de segundo orden paso bajo pasivo (III)



La presencia de estos dos elementos almacenadores de energía, supone que entre ellos se produzca el fenómeno de la resonancia.
A la frecuencia de resonancia, las parte imaginarias de las impedancias de la bobina y el condensador se anulan apareciendo un máximo en la tensión de salida.
Si la resistencia, R, fuese muy elevada, la tensión de salida sería virtualmente infinita.
En términos de la selectividad del filtro o de la calidad de éste, la resonancia consigue:

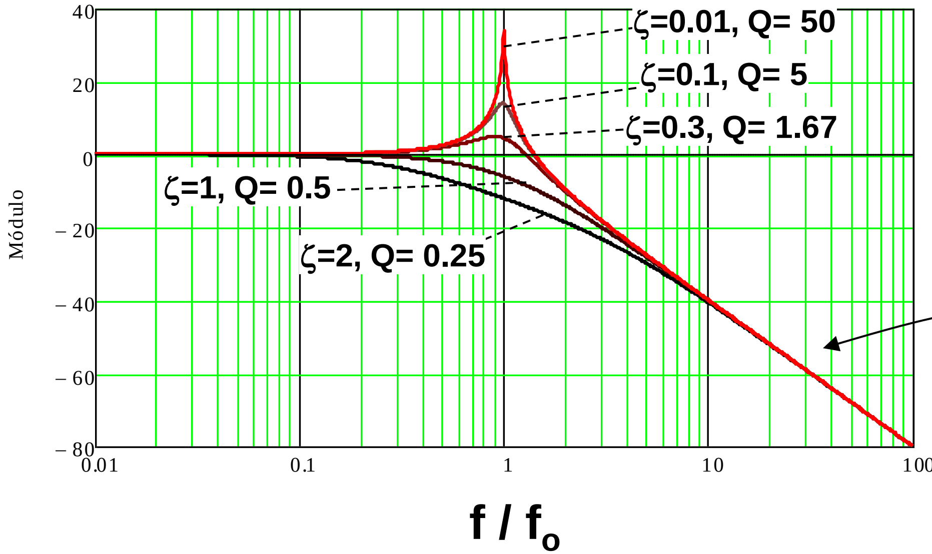
$\xi < 1$ depende de la relación $Z_o/R = 2\xi$

$Q > 0,5$ $$Q = \frac{1}{2 \cdot \xi}$$

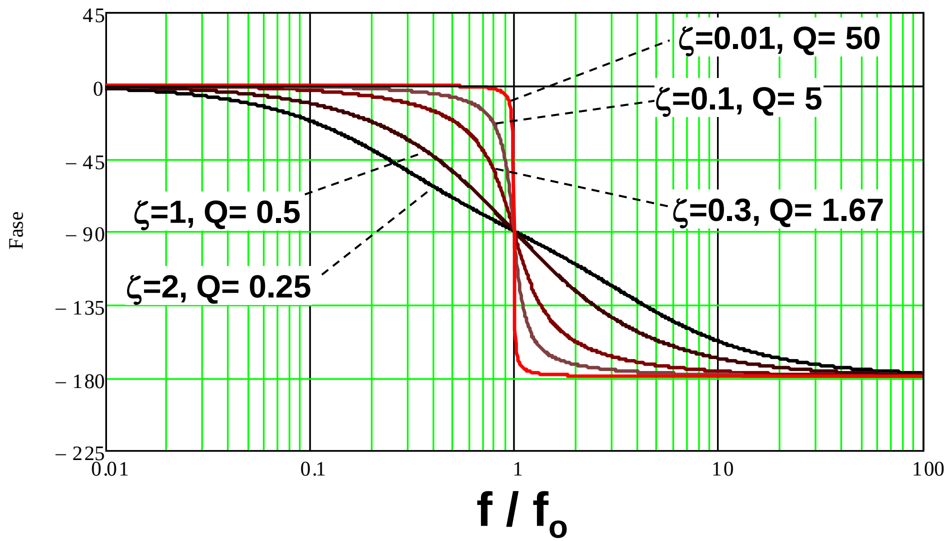
Sistemas subamortiguados:

$$R \to \infty \;\Rightarrow\; Z_o/R \to 0 \;\Rightarrow\; \xi \to 0$$
$$\Rightarrow\; Q \to \infty$$

Filtro de segundo orden paso bajo pasivo (IV)



Pendiente de - 40dB/dec



Filtro de segundo orden paso bajo pasivo (IV)

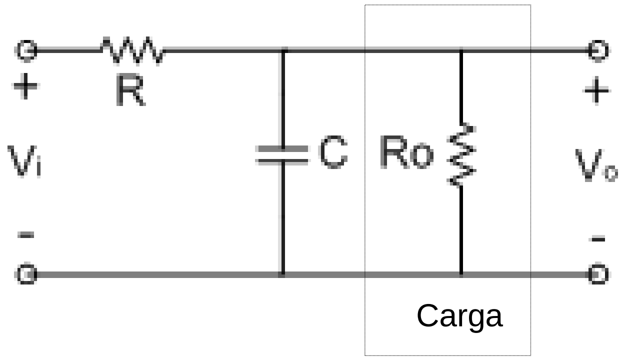
Ventajas de un filtro de segundo orden L-C:

- Respecto a los de primer orden, mayor atenuación (-40 dB/dec).
- Menor caída de la ganancia en las proximidades de f_o.
- Fase más abrupta.
- Respuesta ante escalón.

Desventajas de un filtro de segundo orden L-C:

- Tamaño y coste de la bobina para baja frecuencia

Filtros pasivos, problema adaptación impedancias (I)



$$\frac{v_o}{v_i}(s) = \frac{R_o}{R_o + R} \cdot \frac{1}{1 + (R_o \| R)\, CS}$$

- La ganancia depende de la carga R_o.
- La frecuencia de corte depende de la carga R_o.

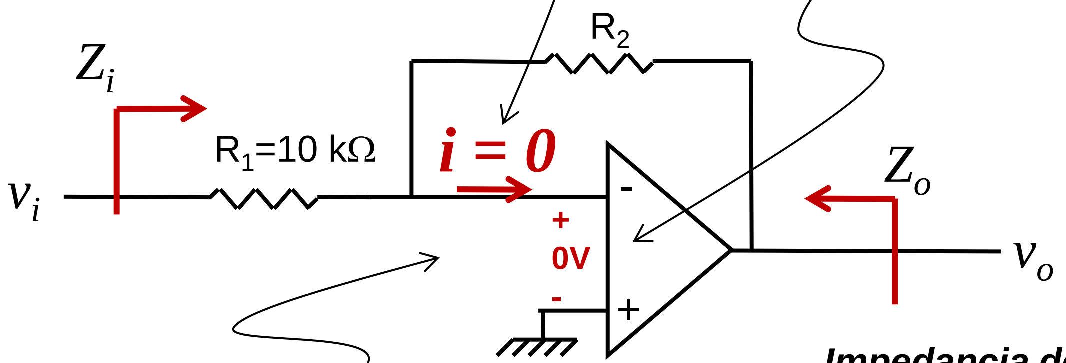
Recordatorio: análisis de circuitos con operacionales realimentados negativamente

Impedancia de entrada
La impedancia de entrada en bucle cerrado, depende de la topología. La Ri infinita del AO ayuda, pero no impone que Zi sea también infinita. En este caso Zi = R_1

Corriente de entrada al AO nula
La Ri del AO es idealmente infinita por tanto to absorbe corriente en sus entradas.

$A(j\omega)$

Ancho de banda muy elevado
Se supondrá que a la frecuencias de interés del filtro, el operacional no tiene limitado su ancho de banda



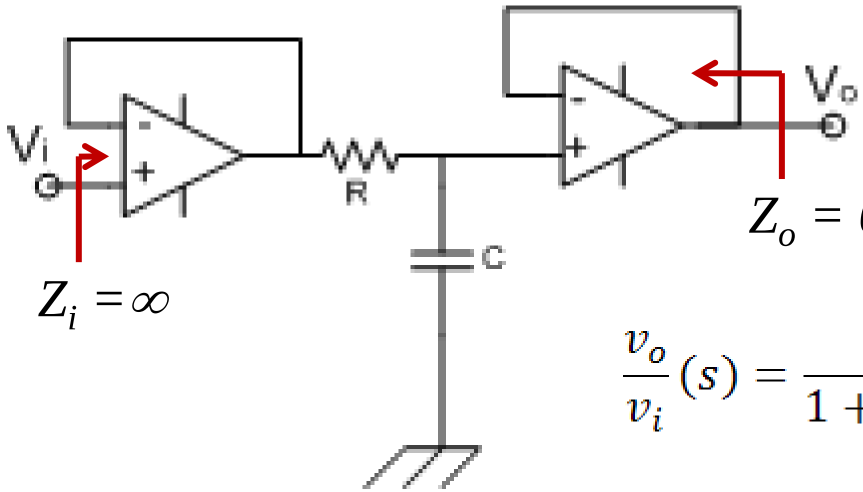
Impedancia de salida nula
La Ro del AO es idealmente cero, pero además el circuito tiene una realimentación paralelo a la salida, que la disminuye todavía más.

Cortocircuito virtual
La diferencia de potencial entre las entradas no inversora e inversora es virtualmente cero, ya que el AO tiene ganancia infinita y la tensión de salida toma valores finitos

$$(v^+ - v^-)\cdot A = v_o$$

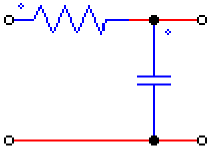
cero infinito finito

Filtro paso bajo de 1er orden con seguidores de tensión

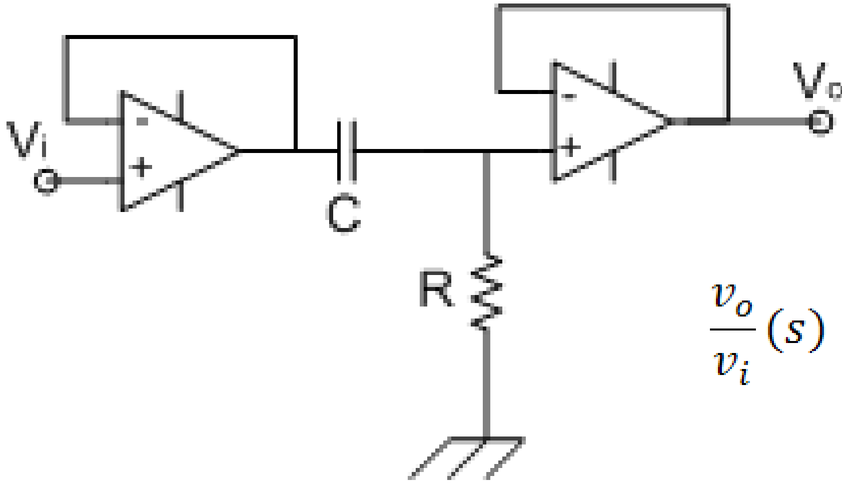


$$\frac{v_o}{v_i}(s) = \frac{1}{1 + RCs}$$

1. Impedancias de entrada y salida ideales
2. Idéntica función de transferencia que el filtro pasivo



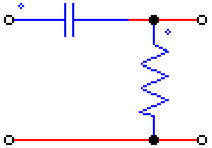
Filtro paso alto de 1er orden con seguidores de tensión



$$\frac{v_o}{v_i}(s) = \frac{RCs}{1 + RCs}$$

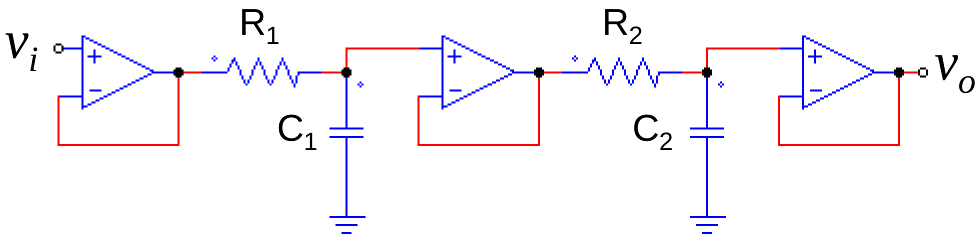
1. Impedancias de entrada y salida ideales

2. Idéntica función de transferencia que el filtro pasivo



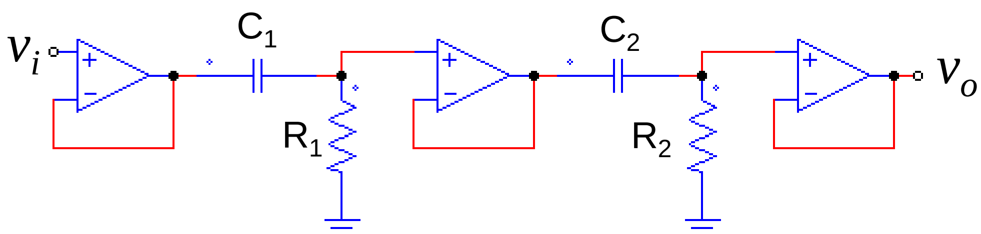
Asociación de etapas mediante seguidores de tensión

filtro paso bajo 2º orden con Q<0,5



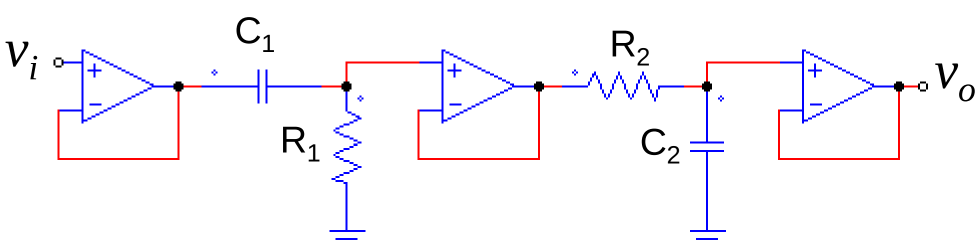
$$\frac{v_o}{v_i}(s) = \frac{1}{(1 + R_1C_1s)\cdot(1 + R_2C_2s)}$$

filtro paso alto 2º orden con Q<0,5



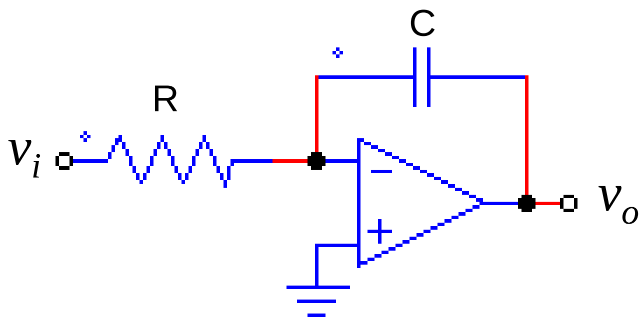
$$\frac{v_o}{v_i}(s) = \frac{R_1C_1s \cdot R_2C_2s}{(1 + R_1C_1s)\cdot(1 + R_2C_2s)}$$

filtro paso banda con Q<0,5



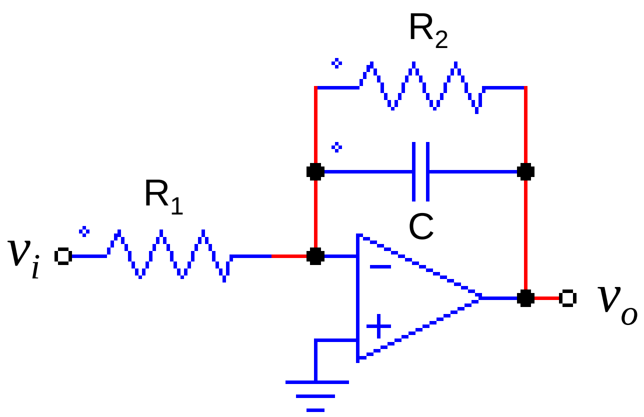
$$\frac{v_o}{v_i}(s) = \frac{R_1C_1s}{(1 + R_1C_1s)\cdot(1 + R_2C_2s)}$$

Filtro paso bajo orden 1 - inversor.



Integrador PURO

$$\frac{v_o}{v_i}(s) = \frac{-\frac{1}{Cs}}{R} = -\frac{1}{RCs}$$

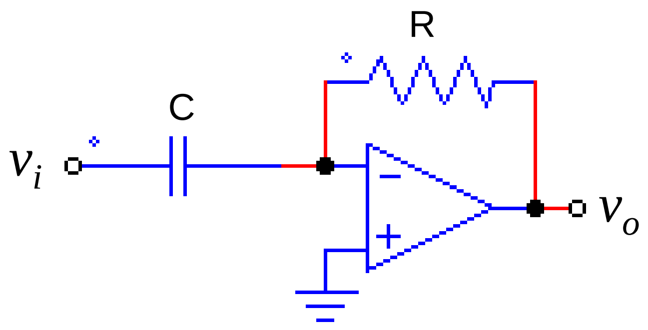


Integrador REAL filtro paso bajo inversor

$$\frac{v_o}{v_i}(s) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{1}{1 + R_2 Cs}$$

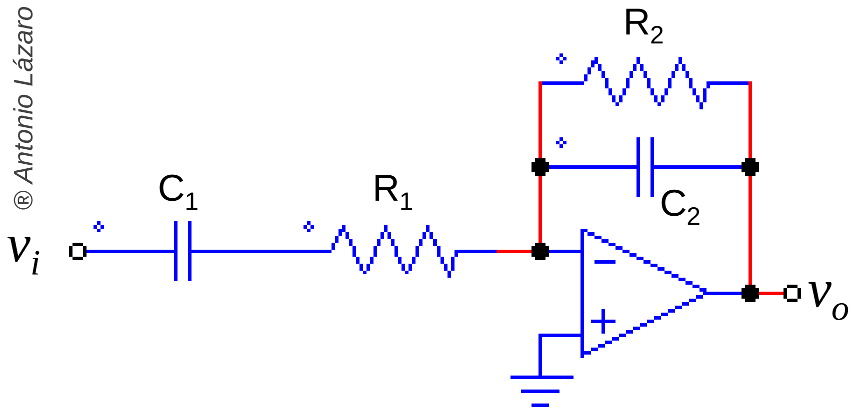
Filtros de 1er orden con topología inversora (II)

Filtro paso alto orden 1 - inversor.



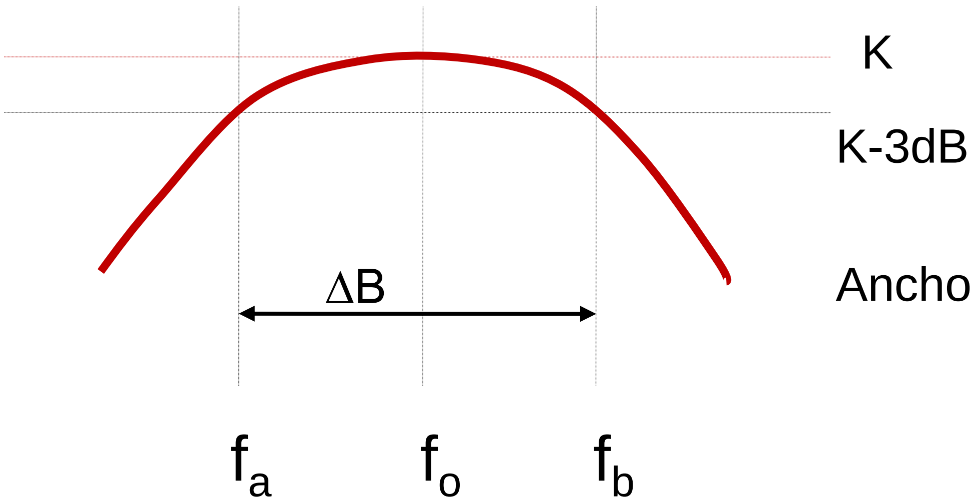
$$\frac{v_o}{v_i}(s) = -RCs$$

Filtro paso banda orden 1 - inversor.



$$\frac{v_o}{v_i}(s) = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_1 C_1 s}{(1 + R_1 C_1 s) \cdot (1 + R_2 C_2 s)}$$

Concepto de **selectividad** del filtro



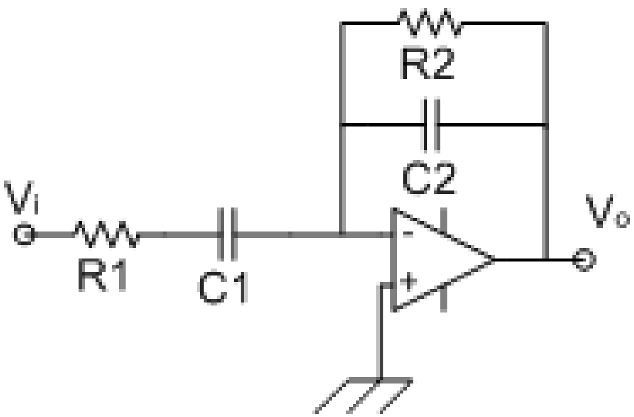
Ancho de banda: $\Delta B = f_b - f_a$

Factor de calidad del filtro: $Q = f_o / \Delta B$

Filtro **muy selectivo**: Q↑. (En filtros paso banda se necesita Q↑)

Filtro **poco selectivo**: Q↓

Máximo factor de calidad en filtros de primer orden.

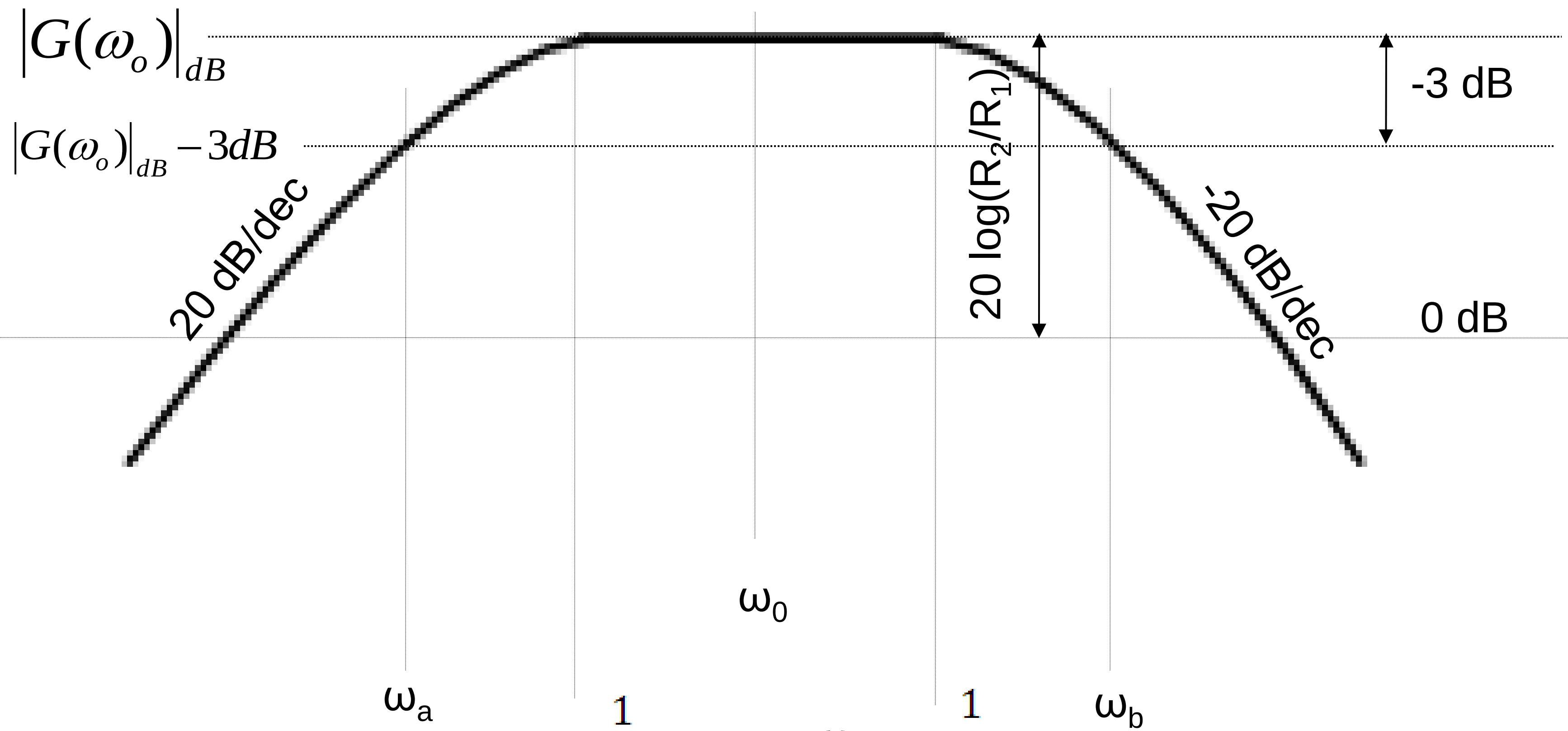


$$Z_2 = \frac{R_2}{1 + R_2 C_2 s}$$

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{C_1 s}$$

$$G = \frac{v_o}{v_i} = -\frac{Z_2}{Z_1} = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{R_1 C_1 s}{(1 + R_1 C_1 s)(1 + R_2 C_2 s)}$$

Q máximo en Filtros de 1er orden con topología inversora (III)



$$\omega_1 = \frac{1}{R_1 C_1} \qquad \omega_2 = \frac{1}{R_2 C_2}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\omega_a \cdot \omega_b}$$

$$\Delta B = \omega_b - \omega_a$$

Q aumenta si ω_2 y ω_1 se acercan.

El caso extremo es $\omega_2 = \omega_1 = \omega_p = 1/RC$

En este caso la función de transferencia puede escribirse como:

$$G = -\frac{R_2}{R_1} \cdot \frac{\frac{s}{\omega_1}}{\left(1+\frac{s}{\omega_1}\right)\left(1+\frac{s}{\omega_2}\right)} = -\frac{R}{R} \cdot \frac{sRC}{(1+sRC)^2} = -\frac{sRC}{(1+sRC)^2}$$

$$|G(\omega_p)| = \left|\frac{1}{(1+j1)^2}\right| = \frac{1}{2}$$

(Polo doble en ω_p)

$$|G(\omega_a)|_{dB} = |G(\omega_b)|_{dB} = |G(\omega_p)|_{dB} - 3dB$$

O bien:

$$|G(\omega_a)| = |G(\omega_b)| = |G(\omega_p)| \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$|G(\omega_a)| = |G(\omega_b)| = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}$$

¿Cómo se calcula $|G(\omega_a)|$?

$$|G(\omega_a)| = +\left|\frac{j\dfrac{\omega}{\omega_a}}{\left(1+j\dfrac{\omega}{\omega_a}\right)^2}\right| = \left|\frac{jx}{(1+jx)^2}\right| = \left|\frac{x}{1+2jx-x^2}\right| =$$

$$= \left|\frac{x}{1-x^2+2jx}\right| = \frac{x}{\sqrt{(1-x^2)^2+(2x)^2}} = \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^2}}$$

$$= \frac{x}{\sqrt{(1+x^2)^2}} = \frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad x = \begin{cases} -1+\sqrt{2} \\ +1+\sqrt{2} \end{cases}$$

Por tanto, $\begin{cases} \omega_a = \omega_p\left(-1+\sqrt{2}\right) \\ \omega_b = \omega_p\left(1+\sqrt{2}\right) \end{cases}$

$$Q = \frac{\omega_o}{\Delta B}$$

El caso que se está analizando es el más favorable, ya que el ancho de banda será menor y por tanto máximo el Q que se obtenga. Finalmente para el mejor caso se obtiene:

$$Q = \frac{\omega_p}{\omega_b - \omega_a} = \frac{\omega_p}{\omega_p\left[1+\sqrt{2}-\left(-1+\sqrt{2}\right)\right]} = \frac{1}{2}$$

Por tanto, con un **filtro de primer orden, aú**n con operacionales, sólo se puede conseguir un $\mathbf{Q_{max} = 1/2}$

Q máximo en Filtros de 1er orden con topología inversora (VII)

¿Dónde están situados los polos del filtro en bucle cerrado?

$$G = -\frac{R_1}{R_2} \cdot \frac{R_1 C_1 s}{(1 + R_1 C_1 s)(1 + R_2 C_2 s)} = -A_v \frac{\frac{s}{\omega_1}}{\left(1 + \frac{s}{\omega_1}\right)\left(1 + \frac{s}{\omega_2}\right)} =$$

$$= -A_v \frac{s}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_1 \cdot \omega_2}{(s + \omega_1)(s + \omega_2)} = -A_v \frac{s}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_1 \cdot \omega_2}{s^2 + s(\omega_1 + \omega_2) + \omega_1 \cdot \omega_2} =$$

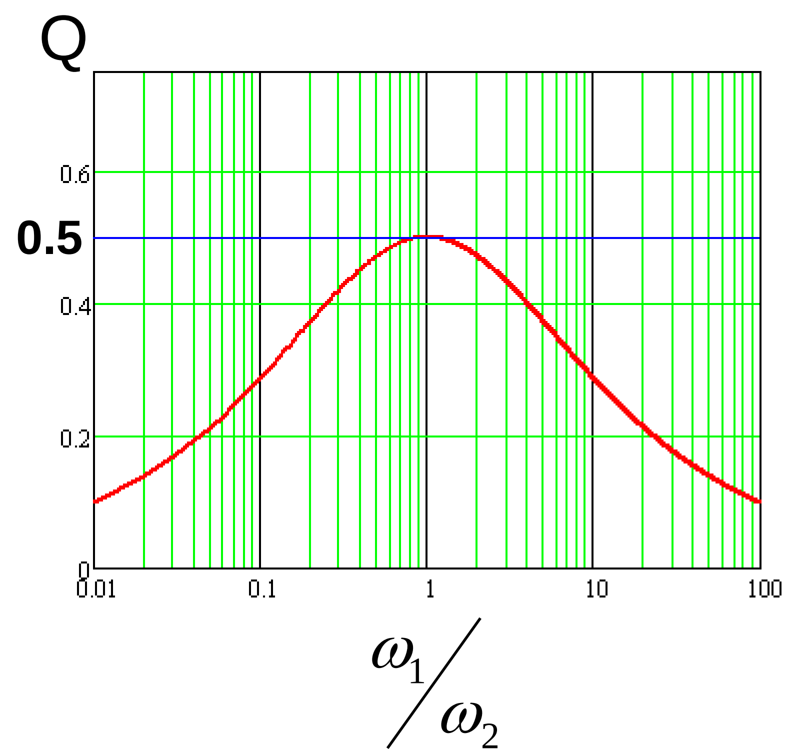
$$= -A_v \frac{s}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_0^2}{s^2 + 2\xi \omega_0 s + \omega_0^2} = -A_v \frac{s}{\omega_1} \cdot \frac{\omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

Identificando términos

$$\omega_o^2 = \omega_1 \cdot \omega_2 \Rightarrow \omega_o = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}$$

$$\frac{\omega_o}{Q} = \Longrightarrow Q = \frac{\sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}}{\omega_1 + \omega_2}$$

Por tanto, con un **filtro de primer orden**, aún con operacionales, sólo se puede conseguir un **Q_{max} = ½** y se obtiene para el caso de **$\omega_1 = \omega_2$**



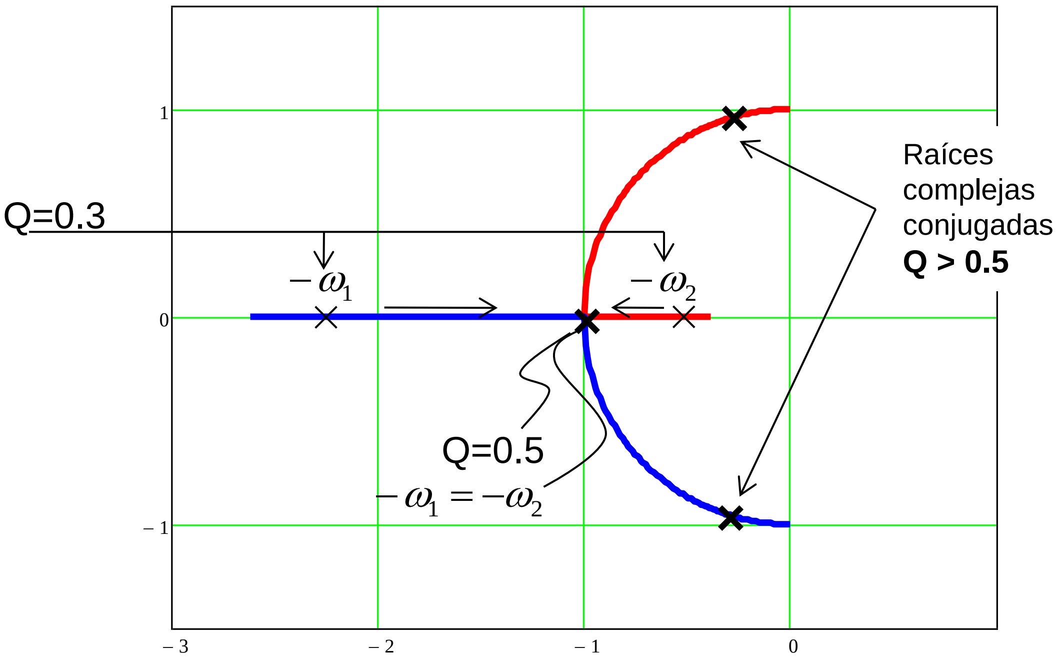
Q máximo en Filtros de 1er orden con topología inversora (IX)

Por tanto, con un **filtro de primer orden**, sólo se logran raíces reales y Q < 0.5. Para conseguir obtener Q > 0,5 es necesario que las raíces de sean complejas conjugadas.

Esto se consigue:

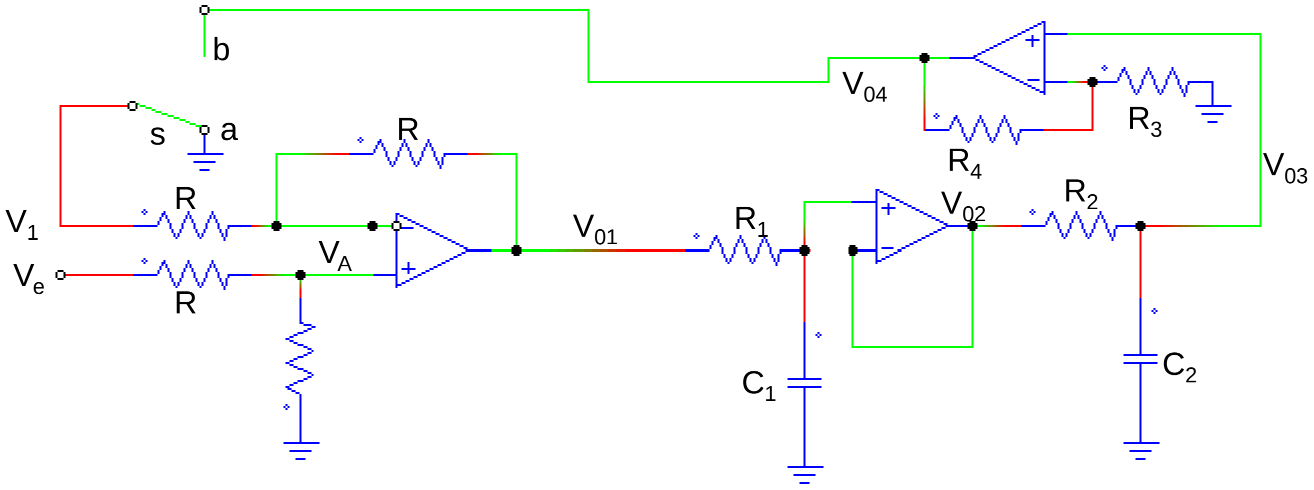
- En filtro pasivos LC por efecto de la resonancia.
- En filtros activos, por medio de la realimentación negativa.

Lugar de las raíces



Posición a, sin realimentación. ¿Cuál es el ζ mínimo o el Q máximo?

Interruptor S en la posición a



Q máximo en un filtro con realimentación negativa (II)

Amplificador diferencial

$$\left.\begin{array}{l} v_o = -\dfrac{R}{R} v_1 + \left(1 + \dfrac{R}{R}\right) v_A \\[2ex] v_A = v_e \cdot \dfrac{R}{2R} = 0{\acute{}}5 v_e \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} v_o = -v_1 + 2 \cdot 0{\acute{}}5 v_e \\[2ex] \boxed{v_0 = v_e - v_1} \end{array}$$

Redes paso bajo

Sus funciones de transferencia dependen solo de las resistencias y condensadores, ya que ambas redes trabajan sin carga de la siguiente etapa.

$$\frac{v_{02}}{v_{01}} = \frac{\omega_1}{s + \omega_1} \qquad \frac{v_{03}}{v_{02}} = \frac{\omega_2}{s + \omega_2}$$

v_{03} es la salida del filtro

Red de realimentación activa con ganancia de valor β

$$\frac{v_{04}}{v_{03}} = \left(1 + \frac{R_4}{R_3}\right) = \beta \rangle 1$$

Q máximo en un filtro con realimentación negativa (III)

Ganancia en bucle abierto

$$\frac{v_{o3}}{v_e} = A_{(s)} = \frac{\omega_1 \cdot \omega_2}{s^2 + (\omega_1 + \omega_2) \cdot s + \omega_1 \cdot \omega_2}$$

Identificando términos con la ecuación bi-cuadrática paso bajo

$$A = \frac{\omega_1 \cdot \omega_2}{s^2 + (\omega_1 + \omega_2) \cdot s + \omega_1 \cdot \omega_2} = \frac{\omega_o^2}{s^2 + 2\zeta \omega_o \cdot s + \omega_o^2}$$

$$\omega_o^2 = \omega_1 \cdot \omega_2; \quad \omega_o = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}$$

$$\omega_o^2 = \omega_1 \cdot \omega_2; \quad \omega_o = \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}$$

$$2\zeta \cdot \omega_0 = \omega_1 + \omega_2 \Rightarrow \zeta = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2\sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}}$$

$$2\zeta = \frac{1}{Q} \Rightarrow Q = \frac{\sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2}}{\omega_1 + \omega_2}$$

¿Qué factor de amortiguamiento, ζ, y que factor de calidad, Q, se ha llegado a conseguir?

Sea $\omega_2 = n \cdot \omega_1$ ***n*** mide las veces que ω_2 es mayor que ω_1

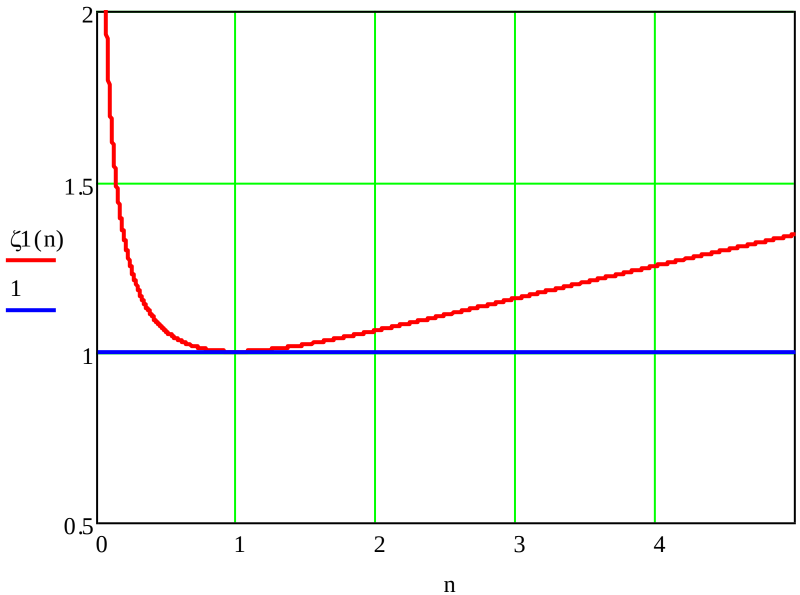
$$\zeta = \frac{\omega_1 \cdot (1+n)}{2 \cdot \sqrt{\omega_1 \cdot n \cdot \omega_1}} = \frac{\omega_1 \cdot (1+n)}{2 \cdot \omega_1 \cdot \sqrt{n}} = \frac{1+n}{2\sqrt{n}}$$

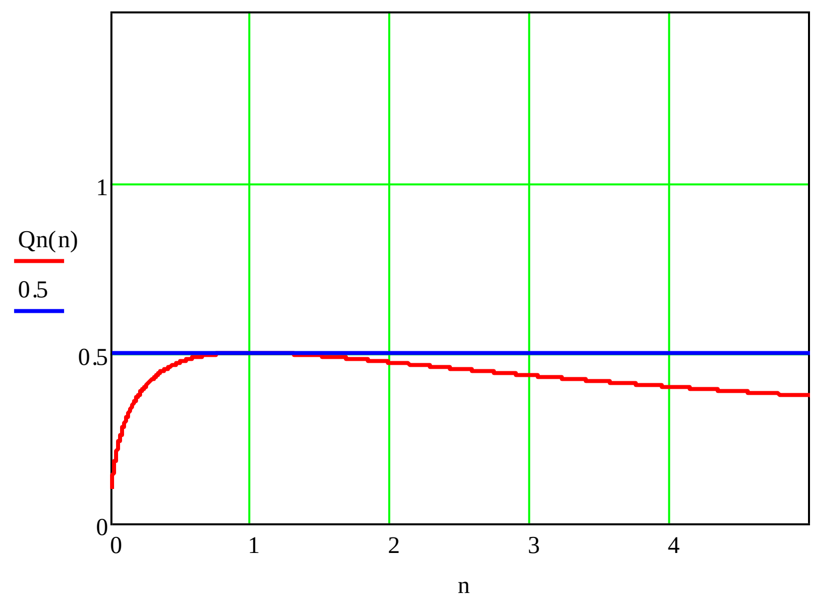
ζ solo depende de n, no de los valores concretos de ω_1 y ω_2

Q máximo en un filtro con realimentación negativa (V)

Factor de amortiguamiento $\zeta = \dfrac{1+n}{2\sqrt{n}}$

Factor de calidad $Q = \dfrac{\sqrt{n}}{1+n}$





El ζ **mínimo** se obtiene para **n=1** y vale:

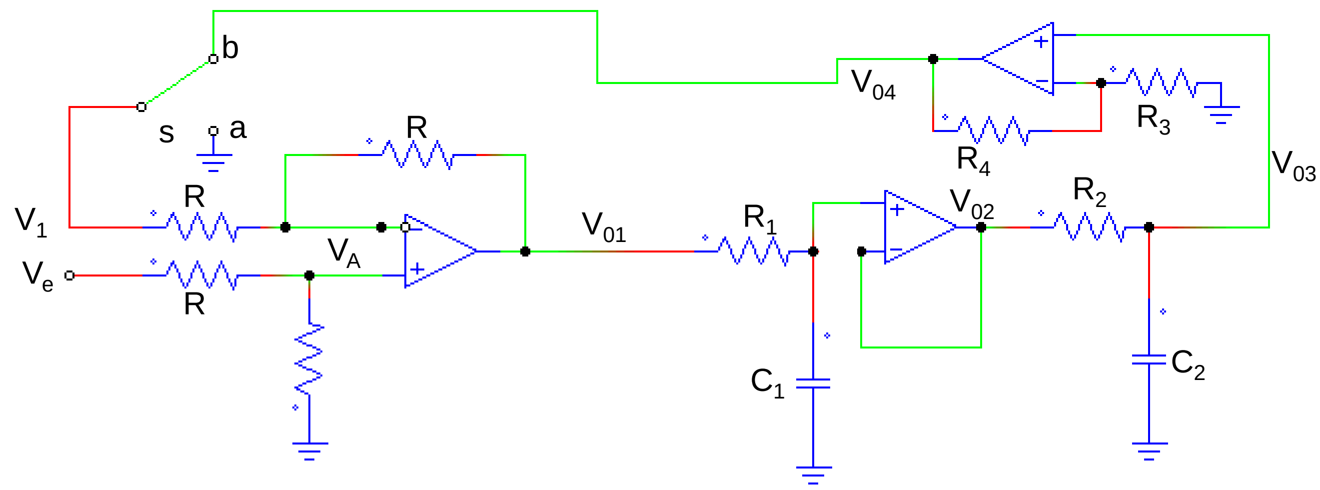
ζ_{min} **= 1**

El Q **máximo** se obtiene para **n=1** y vale:

Q_{max} **= 0,5**

Posición b, operación en bucle cerrado con realimentación negativa a través de una β activa implementada con un amplificador no-inversor.
¿Cuál es el ζ mínimo o el Q máximo?

Interruptor S en la posición b

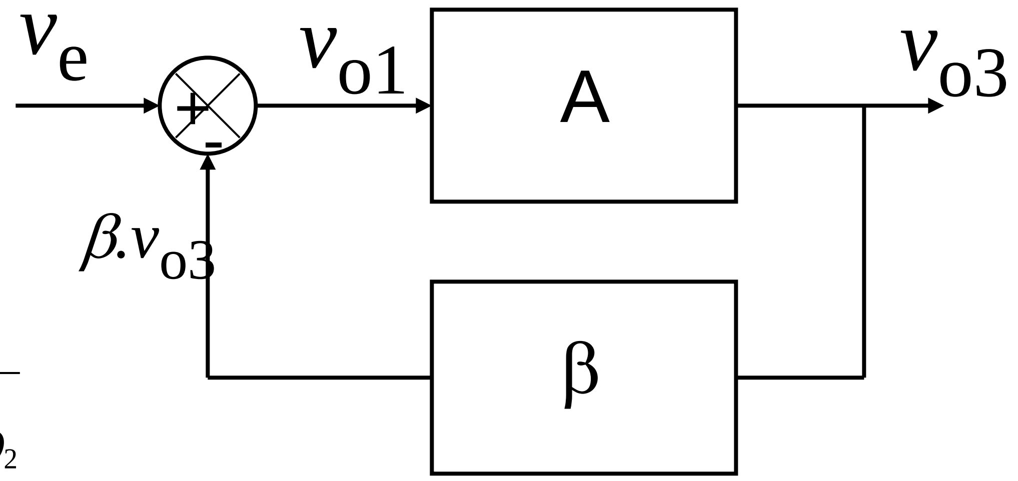


Ahora realimentación.

$$v_{01} = v_e - \beta v_{03} \;;$$

$$v_{03} = v_{01} \cdot A$$

$$A = \frac{\omega_1 \cdot \omega_2}{s^2 + (\omega_1 + \omega_2) \cdot s + \omega_1 \cdot \omega_2}$$



$$G = \frac{A}{1 + A \cdot \beta} = \frac{\dfrac{\omega_1 \cdot \omega_2}{s^2 + (\omega_1 + \omega_2) \cdot s + \omega_1 \cdot \omega_2}}{1 + \dfrac{\omega_1 \cdot \omega_2}{s^2 + (\omega_1 + \omega_2) \cdot s + \omega_1 \cdot \omega_2} \cdot \beta}$$

Q máximo en un filtro con realimentación negativa (VIII)

$$G=\frac{A}{1+A\cdot\beta}=\frac{\dfrac{\omega_1\cdot\omega_2}{s^2+(\omega_1+\omega_2)\cdot s+\omega_1\cdot\omega_2}}{1+\dfrac{\omega_1\cdot\omega_2}{s^2+(\omega_1+\omega_2)\cdot s+\omega_1\cdot\omega_2}\cdot\beta}$$

$$G=\frac{A}{1+A\cdot\beta}=\frac{\omega_1\cdot\omega_2}{s^2+(\omega_1+\omega_2)\cdot s+\omega_1\cdot\omega_2+\omega_1\cdot\omega_2\cdot\beta}$$

Identificando términos con la ecuación bi-cuadrática paso bajo

$$G=\frac{1}{(1+\beta)}\cdot\frac{\omega_1\cdot\omega_2\cdot(1+\beta)}{s^2+(\omega_1+\omega_2)\cdot s+\omega_1\cdot\omega_2(1+\beta)}=\frac{k\cdot\omega_0^2}{s^2+2\zeta\cdot\omega_0\cdot s+\omega_0^2}$$

Q máximo en un filtro con realimentación negativa (IX)

$$\omega_0^2 = (\omega_1 \cdot \omega_2) \cdot (1+\beta); \qquad \omega_0 = \sqrt{(\omega_1 \cdot \omega_2) \cdot (1+\beta)}$$

$$2\zeta \cdot \omega_0 = \omega_1 + \omega_2; \qquad \zeta = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2 \cdot \sqrt{\omega_1 \cdot \omega_2 \cdot (1+\beta)}}$$

¿Qué factor de amortiguamiento, ζ, y que factor de calidad, Q, se ha llegado a conseguir?

Sea $\omega_2 = n \cdot \omega_1$ ***n*** mide las veces que ω_2 es mayor que ω_1

$$\omega_2 = \omega_1 \cdot n \Rightarrow \qquad \zeta = \frac{\omega_1 \cdot (1+n)}{\omega_1 \cdot 2 \cdot \sqrt{n(1+\beta)}}$$

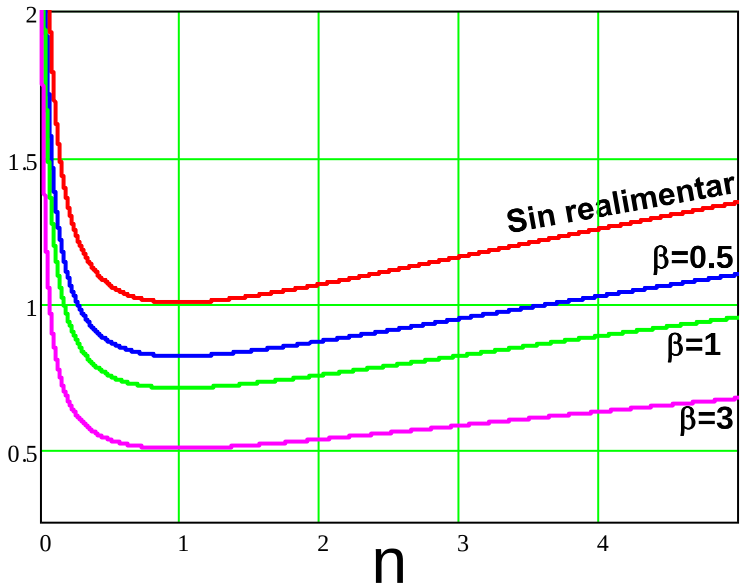
$$\zeta = \frac{(1+n)}{2 \cdot \sqrt{n(1+\beta)}}$$

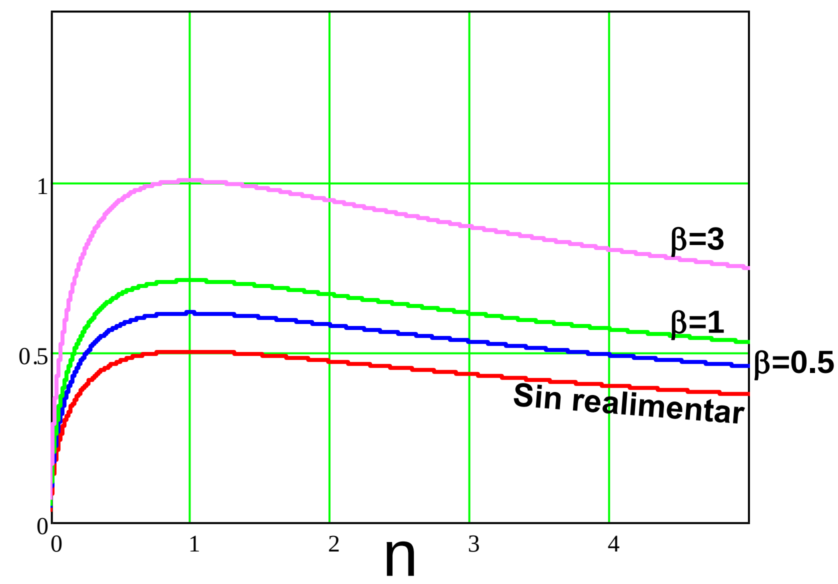
ζ solo depende de β y de n, no de los valores concretos de ω_1 y ω_2

Q máximo en un filtro con realimentación negativa (I)

Factor de amortiguamiento $\zeta = \dfrac{(1+n)}{2\cdot\sqrt{n(1+\beta)}}$

Factor de calidad $Q = \dfrac{\sqrt{n(1+\beta)}}{(1+n)}$





El ζ **mínimo** se obtiene para **n=1** y vale:

$\zeta_{min} < 1$ para cualquier valor de $\beta > 0$

El Q **máximo** se obtiene para **n=1** y vale:

$Q_{max} > 1$ para cualquier valor de $\beta > 0$

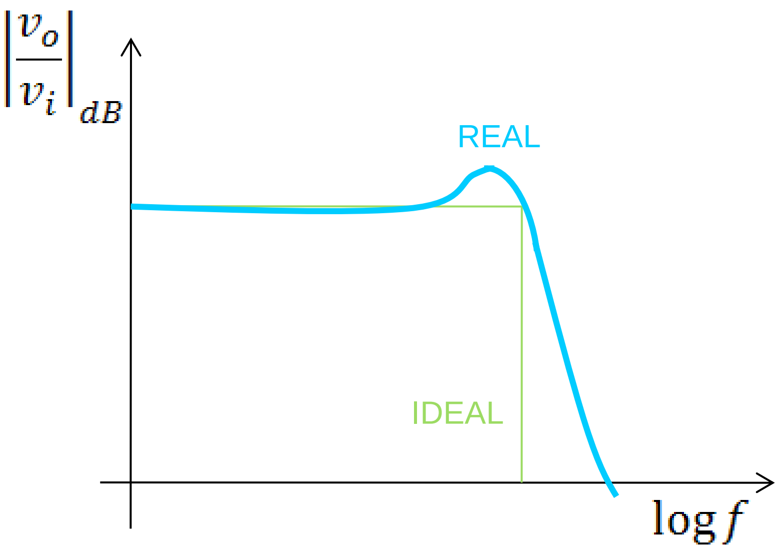
Filtros activos con estructura Sallen & Key

Son filtros de segundo orden con operacionales que consiguen por medio de la realimentación negativa del amplificador desplazar los polos de su respuesta en bucle cerrado hasta que éstos resultan complejos conjugados.

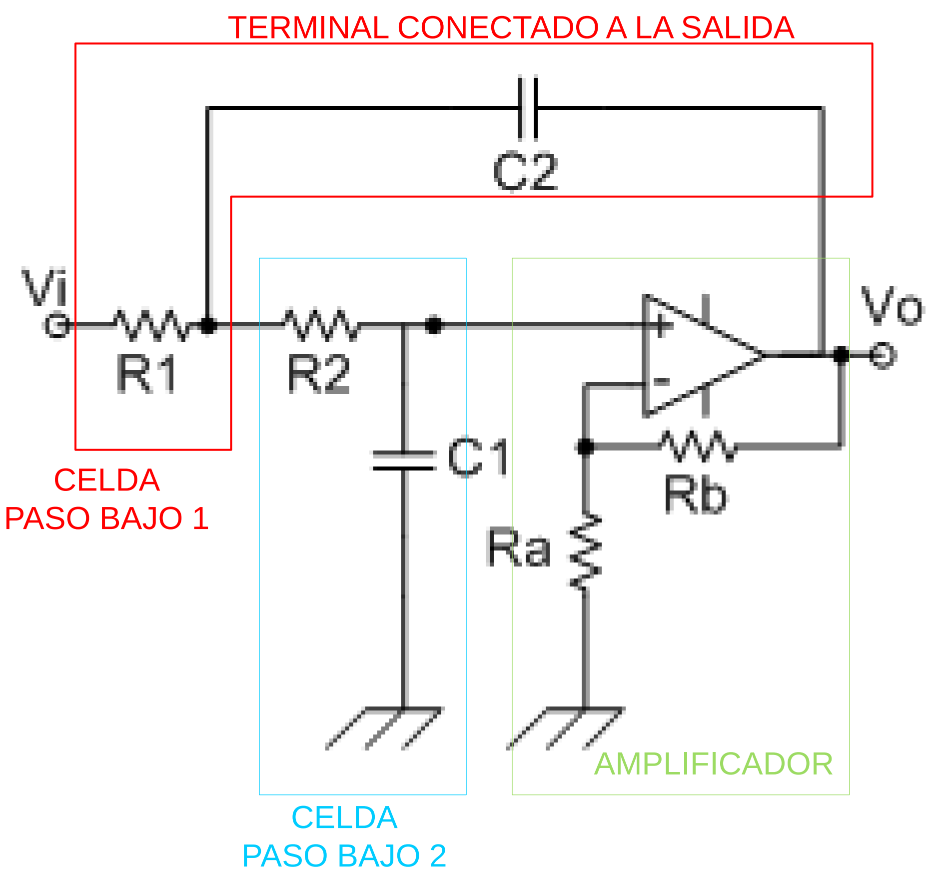
Con ello se consigue $\boldsymbol{Q \geq \frac{1}{2}}$ o $\boldsymbol{\xi < 1}$.

Filtros activos: PASO BAJO

FILTRO PASO BAJO



ESTRUCTURA SALLEN & KEY

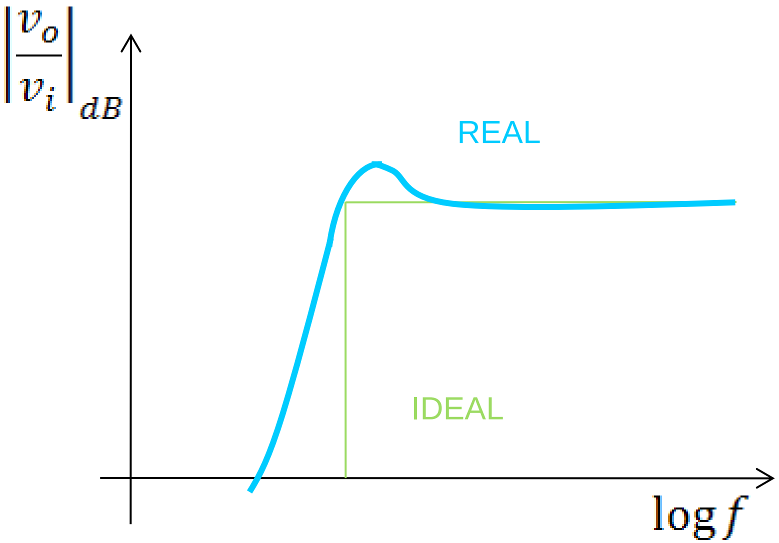


ECUACIÓN BICUADRÁTICA

(función de transferencia)

$$\frac{v_o}{v_i}(s) = \frac{K \cdot \omega_0^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

FILTRO PASO ALTO

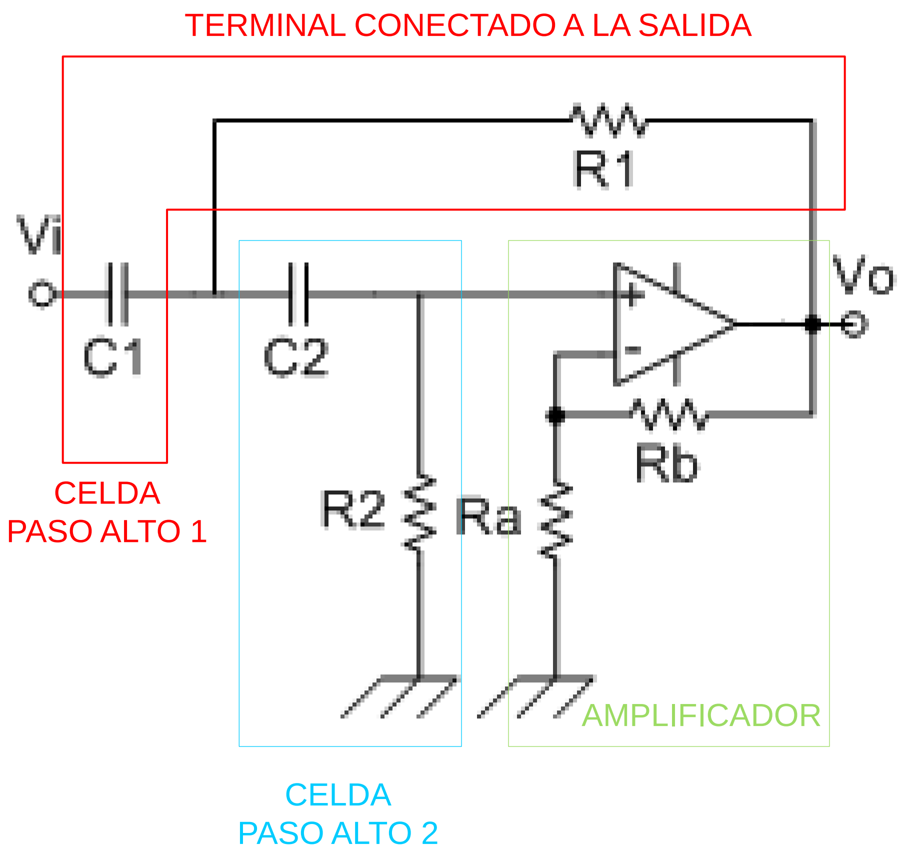


ECUACIÓN BICUADRÁTICA

(función de transferencia)

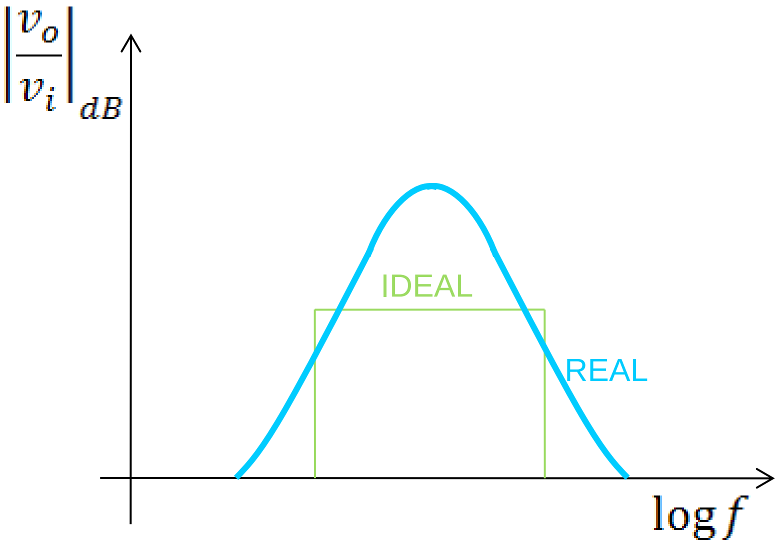
$$\frac{v_o}{v_i}(s) = \frac{K \cdot s^2}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2}$$

ESTRUCTURA SALLEN & KEY



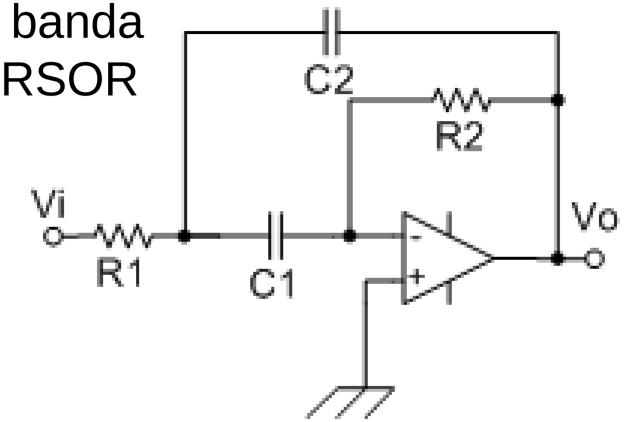
Filtros activos: PASO BANDA

FILTRO PASO BANDA

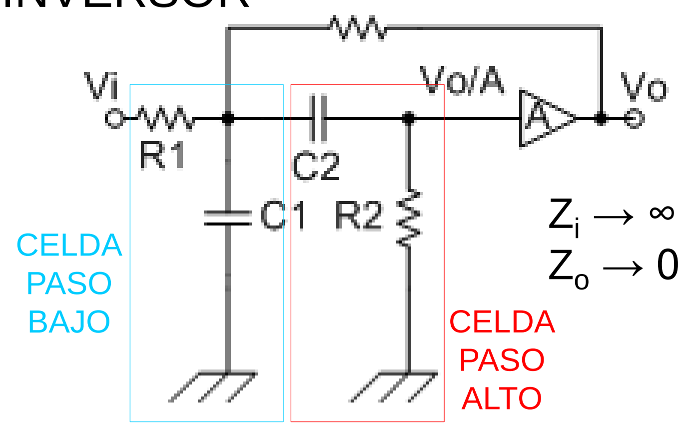


ESTRUCTURA SALLEN & KEY

Paso banda
INVERSOR



Paso banda
NO INVERSOR



$Z_i \rightarrow \infty$

$Z_o \rightarrow 0$

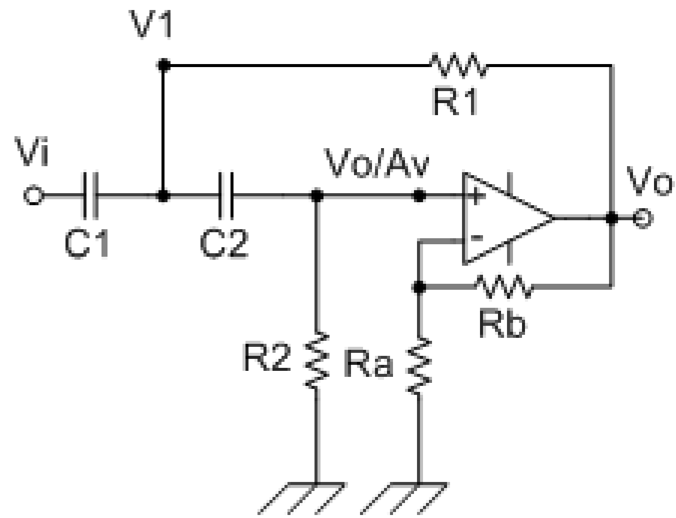
ECUACIÓN BICUADRÁTICA

(función de transferencia)

$$\frac{v_o}{v_i}(s) = \frac{K \cdot s \cdot \omega_0}{s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + \omega_0^2}$$

PASO ALTO (i)

$$(v_o - v_i)sC_1 + \left(\frac{v_o}{A_v} - v_1\right)sC_2 + (v_2 - v_1)\frac{1}{R_1} = 0$$



$$\left(v_1 - \frac{v_0}{A_v}\right)sC_2 = \frac{v_o}{A_v}\frac{1}{R_2} \Rightarrow v_1 = \frac{\frac{v_o}{A_v}\frac{1}{R_2} + \frac{v_o}{A_v}sC_2}{sC_2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_1 = \frac{v_o}{A_v}\cdot\frac{1}{sR_2C_2} + \frac{v_o}{A_v} = \frac{v_o}{A_v}\left(\frac{1}{sR_2C_2} + 1\right)$$

$$v_i sC_1 + \frac{v_o}{A_v}sC_2 + \frac{v_o}{R_1} = \frac{v_o}{A_v}\left(\frac{1}{sR_2C_2} + 1\right)\left(sC_1 + sC_2 + \frac{1}{R_1}\right)$$

PASO ALTO (ii)

$$v_i s C_1 = v_o \left[\frac{1}{A_v}\left(\frac{1}{sR_2C_2}+1\right)\left(sC_2+sC_2+\frac{1}{R_1}\right)-\frac{sC_2}{A_v}-\frac{1}{R_1}\right]$$

$$\frac{v_o}{v_i}=\frac{sC_1A_v}{\left(\frac{1}{sR_2C_2}+1\right)\left(sC_1+sC_2+\frac{1}{R_1}\right)-\frac{sC_2}{A_v}-\frac{1}{R_1}}=$$

$$=\frac{A_v sC_1 sR_2C_2}{(1+sR_2C_2)\left(sC_1+sC_2+\frac{1}{R_1}\right)-sC_2sR_2C_2-\frac{A_v}{R_1}sR_2C_2}=$$

$$=\frac{A_v sC_1 sR_2C_2R_1}{(1+sR_2C_2)(sR_1C_1+sR_1C_2+1)-s^2R_1R_2C_2^2-A_v sR_2C_2}$$

$$Si\ se\ hace\ R_1=R_2=R\ \ y\ \ C_1=C_2=C\ \ ,entonces$$

PASO ALTO (iii)

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{A_V s^2 R^2 C^2}{(1 + sRC)(2sRC + 1) - s^2 R^2 C^2 - A_v sRC} =$$

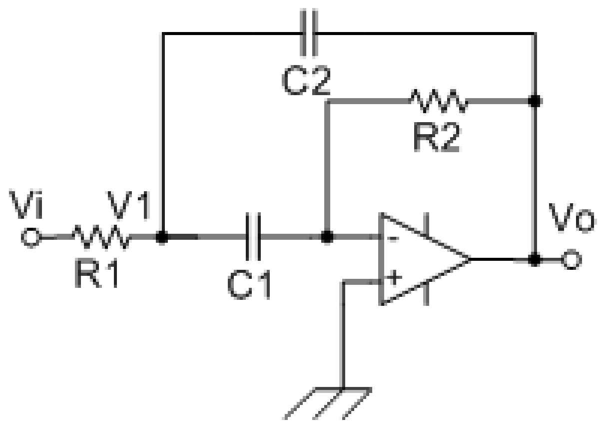
$$= \frac{A_V s^2 R^2 C^2}{2sRC + 1 + 2s^2 R^2 C^2 + sRC - s^2 R^2 C^2 - A_v sRC} =$$

$$= \frac{A_V s^2 R^2 C^2}{s^2 R^2 C^2 + s(3 - A_v)RC + 1} = \frac{A_v s^2}{s^2 + s\dfrac{3 - A_v}{RC} + \dfrac{1}{R^2 C^2}}$$

$$K = A_v \quad ; \quad \omega_0 = \frac{1}{RC} \quad ; \quad Q = \frac{1}{3 - A_v}$$

PASO BANDA INVERSOR (i)

$$\frac{v_o}{v_i}(s) = -\frac{sR_{21}C_1}{R_1R_2C_1C_2s^2 + sR_1(C_1 + C_2) + 1}$$



$$(1) \quad \overbrace{(v_i - v_1)\frac{1}{R_1}}^{i_{R_1}} + \overbrace{(v_o - v_1)sC_2}^{i_{C_2}} = \overbrace{sv_1C_1}^{i_{C_1}}$$

$$(2) \quad \underbrace{s\, v_1C_1}_{i_{C_1}} + \underbrace{v_o\frac{1}{R_2}}_{i_{R_2}} = 0 \Rightarrow v_1 = -v_o\frac{1}{sR_2C_1}$$

PASO BANDA INVERSOR (ii)

$De\ (1)\ se\ tiene$

$$v_i \frac{1}{R_1} + v_o s C_2 = \ v_1 \left(sC_1 + \frac{1}{R_1} + sC_2 \right) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ \frac{v_i}{R_1} + v_o s C_2 = -\frac{v_o}{sR_2C_1} \left(sC_1 + \frac{1}{R_1} + sC_2 \right) \ \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{v_o}{v_i} = -\frac{\frac{R_2}{R_1}}{1 + \frac{1}{sR_1C_1} + \frac{C_2}{C_1} + sR_2C_2} = -\frac{sR_2C_1}{s^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + sR_1(C_1 + C_2) + 1}$$

$Si\ se\ hace\ R_1 = R_2 = R\ \ y\ \ C_1 = C_2 = C\ \ , entonces$

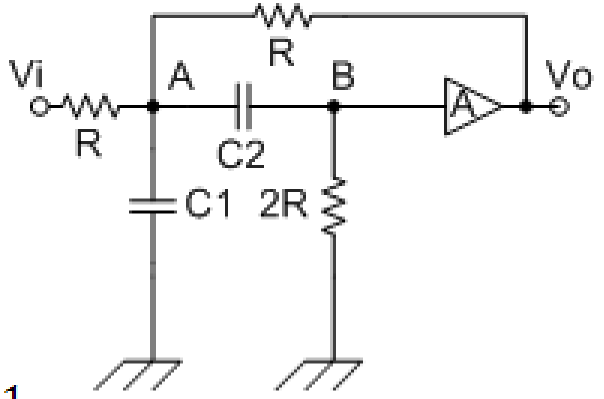
PASO BANDA INVERSOR (iii)

$$\frac{v_o}{v_i} = -\frac{\frac{1}{RC}s}{s^2 + s\frac{2}{RC} + \frac{1}{R^2C^2}}$$

$$Identificando\,términos,$$

$$K = -\frac{1}{RC} \quad ; \quad \omega_0 = \frac{1}{RC} \quad ; \quad Q = \frac{1}{2}$$

PASO BANDA NO INVERSOR (i)



Nodo A

$$(1) \quad (v_i - v_A)\frac{1}{R} = v_A Cs + (v_A - v_B)Cs + (v_A - v_o)\frac{1}{R}$$

Operando,

$$v_i - v_A = v_A RCs + (v_A - v_B)RCs + v_A - v_o$$

$$v_i = v_A(2RCs + 2) - v_B RCs - v_o$$

$$v_i = 2v_A(1 + RCs) - v_B RCs - v_o$$

PASO BANDA NO INVERSOR (ii)

Nodo B

$$(2)\quad (v_A - v_B)Cs = v_B \frac{1}{2R}$$

$$v_A Cs = v_B \left(\frac{1}{2R} + Cs\right) = v_B \frac{1 + 2RCs}{2RCs}$$

$$(3)\quad v_B = \frac{v_o}{A}$$

$(3) \rightarrow (2)$

$$v_A = \frac{v_o}{A}\left(\frac{1 + 2RCs}{2RCs}\right)$$

$$(4)\quad v_A = v_o \frac{1 + 2RCs}{2ARCs}$$

PASO BANDA NO INVERSOR (iii)

$$(4) \rightarrow (1)$$

$$ARCs\ v_i = v_o(1 + 2RCs)(1 + RCs) + v_o(RCs)^2 - ARCsv_o$$

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{A\ RCs}{1 + 2RCs + RCs + 2(RCs)^2 - (RCs)^2 - ARCs}$$

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{A\ RCs}{1 + (3 - A)RCs + (RC)^2 s^2}$$

PASO BANDA NO INVERSOR (iv)

$$\frac{v_o}{v_i} = \frac{A\,RCs}{1 + (3-A)RCs + (RC)^2 s^2} = \frac{K\,\dfrac{s}{\omega_0}}{\dfrac{1}{\omega_0^2}s^2 + \dfrac{1}{Q}\dfrac{1}{\omega_0}s + 1}$$

$Identificando\ términos,$

$$\omega_0^2 = \frac{1}{(RC)^2} \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{RC}$$

$$(3-A)\ RC = \frac{1}{Q}\frac{1}{\omega_0} \Rightarrow Q = \frac{1}{3-A}$$

$$A\ RC = K\frac{1}{\omega_0^2} \Rightarrow \frac{A}{RC}$$

Filtros: Cuadro resumen

	Orden	Q	Características
Pasivos	1er orden RC	Q ≤ 0.5	•Problema adaptación Z •Sólo Q < 0.5
	2º orden LC	Q ≥ 0.5	•Problema adaptación Z •Tamaño, peso, coste L •Basado en la resonancia •Consiguen polos complejos conjugados
Amp.Op + 1er orden	1er orden	Q ≤ 0.5	•Buenas Z_i y Z_o •Sólo Q < 0.5
Activos 2º orden	2º orden	Q ≥ ≤ 0.5	•Buenas Z_i y Z_o •Q ≤ 0.5 y Q ≥ 0.5 •Consiguen polos complejos conjugados